Correction : Matrices

1 Exercices

Exercice 1 (*Somme et produit*)

Sommes :

$$A+B=\begin{pmatrix}3&3\\0&-3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad C+D=\begin{pmatrix}0&0&3\\2&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Produits :

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad,\quad BA=\begin{pmatrix}6&3\\-12&-6\end{pmatrix}.$$

$$CD=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}\quad,\quad DC=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad AE=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\-1&-2&3\end{pmatrix}$$

Le produit CE n'a pas de sens car la taille des colonnes (à savoir 2) de E est différent de la taille des lignes (à savoir 3) de C.

Exercice 2 (*Somme, produit, puissance*)

On trouve :

$$AB=\begin{pmatrix}2&-2&0\\2&-2&0\end{pmatrix}\quad AC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad CA=\begin{pmatrix}3&3\\-3&-3\end{pmatrix}$$

Les deux autres produits B^2 et BA n'ont pas de sens.

Exercice 3 (*Equation matricielle*)

$$A+B=\begin{pmatrix}2&a\\b&3,5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4,2&1\\5,1&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2,2&a+1\\b+5,1&3,5+c\end{pmatrix}$$

En comparant on obtient : $d=-2,2$, $a+1=-2$, $b+5,1=8,3$, $3,5+c=6,1$.
D'où :

$$\boxed{a=-3}\quad\boxed{b=3,2}\quad\boxed{c=2,6}\quad\boxed{d=-2,2}$$

Exercice 4 (*Equation matricielle*)

$$A\times B=\begin{pmatrix}2+2a&-8+ab\\4,5&-2+2b\end{pmatrix}\text{ D'où : }\begin{cases}2+2a&=-4\\-8+ab&=-14\\4,5&=c\\-2+2b&=d\end{cases}$$

On a alors $a=-6/2=-3$.
Puis $-8+-3b=-14$, donc $b=-6/(-3)=2$.
Et enfin $d=-2+2b=-2+2\times2=2$

$$\boxed{a=-3} \quad \boxed{b=2} \quad \boxed{c=4,5} \quad \boxed{d=2}$$

Exercice 5

L'égalité des deux matrices mène aux équations :

- $ab+1=-5$ (1)
- $a^2+b=1$ (2)
- $b+a=-1$ (3)
- $a+ab=-4$ (4)

Donc $b=-1-a$ et $ab=-6$.
Donc $a\times(-1-a)=-6$, ce qui mène à $a^2+a-6=0$.
C'est une équation du second degré, $\Delta=25$, donc deux solutions $a=\dfrac{-1-5}{2}=-3$ ou $a=\dfrac{-1+5}{2}=2$.
On a donc deux possibilités

$$(a,b)=(-3,2) \quad \text{ou} \quad (a,b)=(2,-3)$$

Les quatre équations sont vérifiées pour le couple $(2,-3)$, mais l'équation (2) n'est pas vérifiée pour $(-3,2)$ car $a^2+b=9+2=11\neq 1$

La seule solution est $\boxed{a=2}$ et $\boxed{b=-3}$.

Exercice 6

- $A+B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 9\end{pmatrix}$
- $2A-B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}$
- $AB=\begin{pmatrix}2 & 14\\ 4 & 24\end{pmatrix}$
- $BA=\begin{pmatrix}6 & 16\\ 8 & 20\end{pmatrix}$