Exercices : Loi uniforme et binomiale

1 Application des formules

Exercice 1

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,8]\!])$.

1. Calculer $P(2 \leq X \leq 5)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{4})$. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8; 0,2)$.

1. Calculer $P(X \leq 2)$
2. Donner l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

Exercice 5

Un livreur a promis de passer chez un client entre 10h et 11h. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.

1. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10h10min ?
2. Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10h20 min et 10h40min ?
3. Sachant que le client a attendu le livreur 15 minutes, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

2 Reconnaître une loi usuelle

Exercice 6

On lance un dé équilibré à 8 faces numérotées de 1 à 8, et on note X la valeur du dé.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Généraliser les résultats précédents à un dé à n face.

Exercice 7

On tire une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 8 boules vertes. On note X la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée est rouge et à 0 sinon.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Généraliser les résultats précédents au cas où l'urne contient une proportion $p \in [0; 1]$ de boules rouges.

Exercice 8

On considère à nouveau l'urne de l'exercice précédent contenant 2 boules rouges et 8 boules vertes. On tire successivement et avec remise 3 boules dans cette urne, et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Généraliser les résultats précédents au cas où l'on tire avec remise n boules dans une urne dont la proportion de boules rouges est p.

Exercice 9 (*Extrait de ESC 2013.*)

Une entreprise fabrique en série des balles de ping-pong à l'aide de deux machines A et B. La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B. Certaines balles fabriquées présentent un défaut. C'est le cas pour 12% des balles fabriquées par la machine A et pour 9 % des balles fabriquées par la machine B. À la sortie des machines, les balles arrivent dans le désordre sur un tapis roulant.

1. (a) On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard. On définit les évènements :
   - A : la balle provient de la machine A ;
   - B : la balle provient de l machine B ;
   - D : la balle présente un défaut.

   Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(D) = \dfrac{1}{10}$.

   (b) On constate que la balle prélevée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?
2. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles défectueuses prélevées.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Donner les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.

   (b) Déterminer, en fonction de n, les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 10 (*Extrait de Ecricome 2005*)

Une entreprise de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un produit commercial A.
La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les utilisateurs du produit A s'estime satisfaite de ce produit est de $\frac{2}{3}$.
On admet que les réponses des consommateurs sont indépendantes les unes des autres.
L'enquête est effectuée auprès d'un échantillon de 20 consommateurs du produit A. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes satisfaites du produit A.

1. Définir la loi de X. Donner l'espérance mathématique et la variance de X.
2. Déterminer la probabilité qu'aucun consommateur ne soit satisfait du produit A.

Exercice 11 (*Extrait de Ecricome 2004.*)

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A et B.

La probabilité pour que la société A livre le colis avec retard est de 0,1, alors que la probaiblité pour que la société B livre avec retard est de 0,2. On suppose les retards successifs indépendants.

Situation 1

L'entreprise décide d'utiliser la société A pendant n jours consécutifs (n étant un entier naturel non nul). On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours où le colis arrive en retard.

1. Déterminer la loi de X.
2. Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ de X.
3. La société A fait payer à l'entreprise un prix de 8 euros par colis livré sans retard, la livraison étant gratuite pour tout colis livré avec retard. On note W le prix payé par l'entreprise sur une période de n jours.
   (a) Exprimer W en fonction de X.
   (b) En déduire le prix moyen payé par l'entreprise sur la période de n jours.

Situation 2

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A dans 40% des cas.

1. Un jour donné, calculer la probabilité que le colis arrive en retard.
2. Un jour donné, le colis arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A ?