

1 Quelques précisions...

Après la leçon de Jeremy, nous avons soulevé quelques points que je voulais préciser :

- **L'espace vectoriel nul** (réduit à $\{0\}$) a pour base \emptyset (il n'y a rien à engendrer!) et est donc de dimension 0.
- Comme l'a souligné Ali, Il est moins facile de montrer que $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$, sans faire appel à l'identification à l'espace des matrices, mais ce n'est pas très compliqué. C'est un petit exercice de manipulation d'indices.
- Pour l'existence d'une base algébrique pour un espace vectoriel quelconque, j'ai évoqué que la démonstration faisait appel à **l'axiome du choix**, dont une bonne explication peut se trouver à http://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix
Dans la rubrique **axiome du choix dénombrable** vous trouverez l'explication de l'exemple que j'avais pris : **choisir** un élément dans une boule de rayon indexé sur \mathbb{N} (par exemple $\mathcal{B}(0, \frac{1}{n})$) définit une suite.
- Le fait que les solutions d'une équation différentielle du type $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un sous espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, fait bien appel au **théorème de Cauchy-Lipschitz**, version linéaire (les solutions maximales sont définies sur I tout entier). Une référence : Gourdon d'analyse page 352 et démonstration page 374.

2 La correction de l'exercice n° 12

Avant d'aborder cet exercice il est nécessaire de connaître cette propriété (E est un ev) :

Lemme 1 $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie $\Leftrightarrow \forall x \in E (x, f(x))$ est liée.

Le sens direct est évident, donnons une preuve du sens réciproque :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E (x, f(x))$ est liée.

Soit $x \neq 0$ et $y \neq 0$ dans E **fixés**.

$(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont liées donc $\exists \lambda_x, \lambda_y$ telles que $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$.

1er cas : Si (x, y) est liée, alors il existe μ tel que $y = \mu x$.

Donc $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x \mu x = \lambda_x y$.

Or $f(y) = \lambda_y y$, donc $\lambda_y y = \lambda_x y$

Puisque $y \neq 0$ on a : $\lambda_x = \lambda_y$

2nd cas : Si (x, y) est libre.

Alors $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x + y)$.

Donc $(\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$.

Puisque (x, y) est libre, on obtient $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$

Conclusion : $\forall x, y \neq 0 \lambda_x = \lambda_y = \lambda$.

Donc $\forall x, f(x) = \lambda x$ (si $x = 0$ cette relation est aussi vérifiée). \square

Passons à la correction de l'exercice 12. **On confond dans cet exercice A et son endomorphisme f associé dans la base canonique de \mathbb{K}^n .**

1. (a) La matrice d'une homothétie est $A = \lambda I_n$ où $\lambda \neq 0$ (l'application nulle n'est pas une homothétie), ce choix ne dépendant pas de la base (pourquoi?). Donc $\text{tr}(A) = n\lambda \neq 0$
- (b) Puisque A n'est pas une matrice d'homothétie, d'après le lemme 1, il existe $e \in \mathbb{K}^n$ tel que (e, Ae) soit libre.

- (c) On pose $e_1 = e$ et $e_2 = Ae$, et puisque ces deux vecteurs forment une famille libre on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de \mathbb{K}^n .

Alors la matrice Δ de f dans la base \mathcal{B} est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}f = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times & \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) = \Delta$$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} on a $\Delta = P^{-1}AP$ \square

- (d) Pour $n = 1$ la propriété est évidente. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$ et prenons une matrice A de trace nulle.

On peut traiter la question en raisonnant sur les endomorphismes (il faut alors considérer la restriction à $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n) = F$ de $p \circ f$ où p est la projection sur F), mais on peut le voir matriciellement :

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times & \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$

Alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(A') = 0$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A' : il existe $D \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ de diagonale nulle et $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $D = Q^{-1}A'Q$.

Posons alors $G = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$

Alors $\det(G) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ donc $G \in GL_n(\mathbb{K})$ et $G^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$

Pour voir ce point on rappelle la règle sur le **produit matriciel par bloc**, (valide si le nombres de ligne et de colonnes le permettent) :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} AA' + BC' & CA' + DC' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{array} \right)$$

On vérifie donc bien que $GG^{-1} = I_n$.

On a de plus avec le calcul matriciel par bloc

$$G^{-1} \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times & \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) G = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times & \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times & \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } G^{-1}P^{-1}APG = (PG)^{-1}A(PG) = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ D \\ \\ \end{array}$$

$$\text{Donc } A \text{ est semblable à } \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \dots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ D \\ \\ \end{array} \text{ qui est une matrice de diagonale nulle}$$

puisque D est de diagonale nulle : cqfd \square

2. (a) $\text{tr}([B, C]) = \text{tr}(BC - CB) = \text{tr}(BC) - \text{tr}(CB) = \text{tr}(BC) - \text{tr}(BC) = 0$
 (b) Si $M = BC - CB$ alors pour $P \in Gl_n(\mathbb{K})$,

$$P^{-1}MP = (P^{-1}BP)(P^{-1}CP) - (P^{-1}CP)(P^{-1}BP) = [P^{-1}BP, P^{-1}CP]$$

Donc $P^{-1}MP$ est aussi un crochet de Lie.

3. (a) Une base de \mathcal{D} est $(E_{i,i})_{i \in [1,n]}$ et une base de \mathcal{D}_0 est $(E_{i,j})_{i,j \in [1,n], i \neq j}$, où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires.

Ceci nous permet d'affirmer que $\boxed{\dim(\mathcal{D}) = n}$ et $\boxed{\dim(\mathcal{D}_0) = n^2 - n}$

- (b) On a $b_{i,j} = \delta_i^j b_i$ (où δ_i^j est le symbole de Kronecker).

$$\text{On a donc } (BC)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} c_{k,j} = b_i c_{i,j} \text{ et de même } (CB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n c_{i,k} b_{k,j} = c_{i,j} b_j.$$

$$\text{Donc } (BC - CB)_{i,j} = (b_i - b_j) c_{i,j}$$

On peut choisir $b_i \neq b_j$ pour tout $i \neq j$ car on est dans un corps infini.

Et alors

$$\begin{aligned} \phi_B(C) = 0 &\Leftrightarrow \forall i, j, (b_i - b_j) c_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \text{ avec } i \neq j, c_{i,j} = 0 \text{ (car } b_i - b_j \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \boxed{C \in \mathcal{D}} \end{aligned}$$

- (c) Alors $C \in \ker(\phi_B) \Leftrightarrow \phi_B(C) = 0 \Leftrightarrow C \in \mathcal{D}$

- (d) D'après le théorème du rang : $n^2 = \text{rg}(\phi_B) + \dim(\ker(\phi_B)) = \text{rg}(\phi_B) + n$

$$\text{Donc } \text{rg}(\phi_B) = n^2 - n.$$

De plus d'après le choix qui a été fait de B , $\text{Im}(\phi_B) \subset \mathcal{D}_0$, donc par égalité des dimensions on obtient que $\boxed{\text{Im}(\phi_B) = \mathcal{D}_0}$

4. Toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de \mathcal{D}_0 qui est un crochet de Lie d'après la question précédente. D'après la question 2-b, M est alors un crochet de Lie.