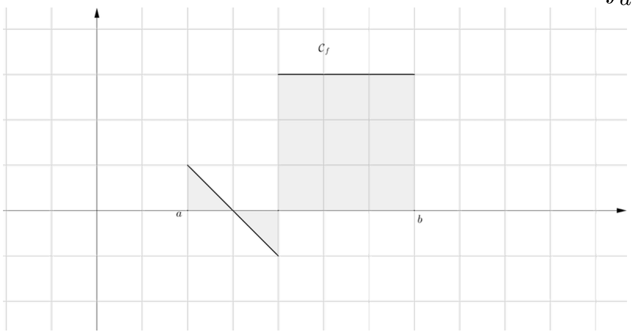
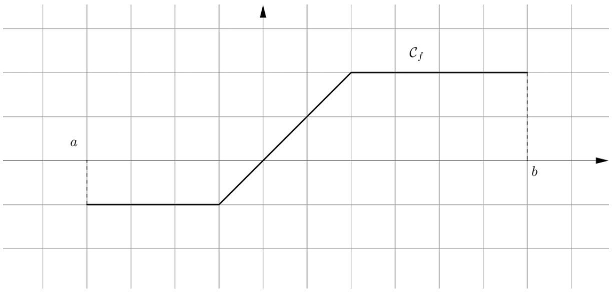
Exercices : Intégration

1 Intégration sur un segment

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer $\int_a^b f(t)dt$.





Exercice 2

Représenter graphiquement la fonction f définie par $\begin{cases} \text{Si } x \in [-1;3], & f(x) = x-1 \\ \text{Si } x \in [3;6], & f(x) = 2 \end{cases}$

En déduire $\int_{-1}^{6} f(t)dt$.

Exercice 3

Calculer les intégrales :

a) $\int_0^5 (x^2 - x + 2)dx$ b) $\int_2^4 \frac{1}{t}dt$ c) $\int_{-2}^{2} (2e^t - 1)dt$ d) $\int_0^4 \frac{1}{t+1}dt$

Exercice 4

Exprimer en fonction de x :

a) $\int_0^x (2t+1)dt$ b) $\int_{-x}^{x} (1 - e^{-t})dt$ c) $\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

2 Intégration généralisée

Exercice 5

Calculer les intégrales :

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2}dt$ c) $\int_{-\infty}^{-1} 2e^{3t}dt$

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^t \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et calculer sa valeur.

3 Intégration par parties

Rappel : l'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exercice 7

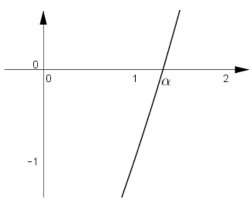
Calculer en utilisant une intégration par parties :

a) $\int_0^2 xe^{-x}dx$ b) $\int_1^2 \ln x dx$ c) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx$

Exercice 8 (*D'après ESC 2008*)

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

1. Calculer la dérivée g' et étudier les variations de g.
   On note α l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
2. Montrer grâce à une intégration par parties que :
$$\int_1^\alpha \ln x dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$$
3. En utilisant la relation vérifiée par α, montrer que :
$$\int_1^\alpha g(x)dx = \frac{8-2\alpha^3}{3} - \alpha$$
4. Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphique ci-dessous :



Exercice 9 (*D'après ESC 2009*)

Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout réel x positif :

$$\int_0^x t^2e^{-t}dt = -x^2e^{-x} + 2\int_0^x te^{-t}dt$$

Exercices : Intégration

Exercice 10

Calculer les intégrales : a) $\int_{-2}^{2}\left(e^t - \frac{t}{2}\right) dt$ b) $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{t^3} dt$ c) $\int_{1}^{2}\left(t^4 - \frac{1}{t^4}\right) dt$

Exercice 11

Calculer les intégrales :

a) $\int_0^2 \frac{1}{t+2} dt$ b) $\int_1^4 \frac{1}{t}(\ln t) dt$ c) $\int_{-2}^{2} e^{-2t} dt$

d) $\int_{-1}^{2} \frac{e^t}{2+e^t} dt$ e) $\int_0^2 (1-t)^3 dt$ f) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt$

Exercice 12

Calculer les intégrales au moyen d'une intégration par parties :

a) $\int_0^2 \frac{1}{2} t e^{-t} dt$ b) $\int_1^2 t(\ln t) dt$ c) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+2t) e^{2t} dt$

Exercice 13

Dire si les intégrales convergent et le cas échéant calculer leur valeur :

a) $\int_{-2}^{+\infty} e^{-3t} dt$ b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{t^2} dt$ c) $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$

Exercice 14

Dire si les intégrales convergent et le cas échéant calculer leur valeur (on pourra recourir à une intégration par parties) :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}(\ln t) dt$ b) $\int_{-\infty}^{2} t e^{\frac{t}{2}} dt$ c) $\int_1^{+\infty} (1-t) e^{-t} dt$

Exercice 15

Dire si les intégrales convergent sans chercher à calculer leur valeur :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{1+t^2} dt$ (on pourra montrer que $\frac{3}{1+t^2} \leq \frac{3}{t^2}$ sur $[1; +\infty[$).

b) $\int_{-\infty}^{-1} -\frac{e^t}{t} dt$ (on pourra montrer que $-\frac{e^t}{t} \leq e^t$ sur $]-\infty; -1]$).

c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{3+t^2} dt$ (on pourra montrer que $\frac{e^{-t}}{1+t^2} \leq e^{-t}$ sur $[0; +\infty[$).