Lycée Grand Nouméa
ECT 2
A. DA SILVA

Devoir maison

Année 2021

A rendre pour le 7 septembre.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} & = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

A Puissances successives de la matrice A

Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. Montrer que $\alpha = 1$ est une racine évidente de P et en déduire une factorisation de P sous la forme $(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$.
2. En déduire l'ensemble des racines de P.
3. Montrer que P est un polynôme annulateur de A . En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
4. Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de A. Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.
5. En utilisant `Scilab` ou https://www.dcode.fr/matrix-inverse, donner l'expression de P^{-1}.
6. Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction des matrices P, D et P^{-1}.
7. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

B Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes

9. Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$.
10. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$.
12. En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.