Lycée Grand Nouméa
ECT 2
A. DA SILVA

Devoir maison 3

Année 2021

A rendre pour le 30 mars.

1 Exercice

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et quatre boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard, puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'un boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;
- si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'un boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose $Z = X_1 + X_2$.

1. (a) Montrer que $P([X_1 = 1]) = \dfrac{2}{5}$.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
   (b) Donner les valeurs de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
   (c) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
2. (a) Montrer que $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \dfrac{12}{25}$.
   (b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de Z.
   (d) Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.
3. On considère l'évènement : « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
4. On se propose, dans cette question, de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
   (a) Calculer Cov (X_1, X_2).
   (b) En déduire $V(Z)$.