Exercices : Variables aléatoires

1 Loi binomiale

Exercice 1

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire 5 fois successivement, avec remise et de façon indépendante, une boule de cette urne. On note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Donner la loi de X.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Une urne contient 2 boules blanches et 1 boule rouge. On tire successivement, à deux reprises, une boule de cette urne, sans remise. On note X le nombre de boules blanches tirées et Y le rang de la première boule blanche tirée.

1. Donner la loi de X et la loi de Y.
2. En déduire l'espérance et la variance de X et de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance de X et de Y.

Exercice 3 (*D'après ESC 2013*)

Une entreprise fabrique en série des balles de ping-pong. 5% des balles présentent un défaut.
On suppose que l'on prélève n balles au hasard en sortie d'usine. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles défectueuses prélevées.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Donner les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.
2. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 4

On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite.
On note X le nombre de changement de résultat de la pièce. Par exemple, $X(PPFP) = 2$ car on est passé de pile à face puis de face à pile. En revanche, $X(FFFF) = 0$ car le résultat n'a jamais changé.
On note Y le nombre de pile obtenu.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X et de Y.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2 Indépendance

Exercice 5 (*Croâââ...Croâââ*)

A chaque saut, une grenouille monte les marches d'un escalier comportant 5 marches. **Si elle a le choix**, elle monte une marche avec la probabilité 0,4 ou deux marches avec la probabilité 0,6. Notons que si elle arrive sur la quatrième marche, elle sera obligé sauter une marche (donc avec un probabilité de 1).
On suppose que chaque saut est indépendant des précédents. On note X le nombre de sauts nécessaire pour arriver en haut de l'escalier, et Y le nombre de fois que la grenouille a sauté une seule marche.

1. Préciser l'univers Ω (on pourra faire un arbre).
2. Ecrire l'évènement $[X = 5]$ sous forme d'un ensemble et calculer $P(X = 5)$.
3. Ecrire l'événement $[Y = 1]$ sous forme d'un ensemble et calculer $P(Y = 1)$.
4. Que vaut $[X = 5] \cap [Y = 1]$? En déduire $P([X = 5] \cap [Y = 1])$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

On lance 2 dés à 6 faces. On note X le plus grand des deux résultats et Y le plus petit. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7

On lance cinq fois une pièce équilibrée. On appelle première chaîne la suite des lancers identiques au premier, et deuxième chaîne la suite des lancers identiques suivants. Par exemple, pour le tirage PPFFP, la première chaîne est PP et la deuxième FF.

On note X la longueur de la première chaîne et Y la longueur de la deuxième (Y vaut 0 s'il n'y a pas de deuxième chaîne).

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et commenter le résultat.

3 Espérance, variance

Exercice 9

Une entreprise gestionnaire d'un parking en loue les places. On note X le nombre de places louées par un client choisi au hasard. La loi de X est donnée par :

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

Le client paie chaque mois 20000 francs de frais fixes plus 5000 francs par place de parking. Quelle recette mensuelle peut **espérer** l'entreprise lorsqu'elle souscrit un contrat avec un nouveau client ?

Exercice 10

On lance deux dés à six faces. On note X la plus grande des deux faces obtenues, au sens large, c'est-à-dire que pour un double c'est la valeur de chacune des faces.
Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 11 (*Linéarité de l'espérance*)

On lance dix fois un dé à 10 faces numérotées de 1 à 10. On note S la variable aléatoire égale à la somme des 10 lancers. Calculer l'espérance et la variance de S.
On note P la variable aléatoire égale au produit des 10 lancers. Calculer l'espérance de P.

Exercice 12 (*Linéarité de l'espérance*)

On lance deux dés, un à 4 faces numérotées de 1 à 4 et un à 6 faces numérotées de 1 à 6. On gagne, en euros, trois fois la valeur du premier dé et on perd deux fois la valeur du deuxième. On note Z la valeur du gain total, valeur négative en cas de perte. Calculer l'espérance de Z

Exercice 13

On tire au hasard et sans remise dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule bleue qui apparaît.

Donner la loi de X, son espérance et sa variance.