Lycée Grand Nouméa
ECT2
A. DA SILVA

Probabilités 2 : Exercices

Année 2021

1 Introduction à la loi géométrique

On dispose d'une pièce **mal équilibrée**. En effet la probabilité d'obtenir "Pile" n'est que de $1/3$.

On lance cette pièce jusqu'à obtention d'un "Pile". Soit X la variable aléatoire qui donne le premier rang d'apparition du pile.

Par exemple l'évènement $(X = 3)$ peut s'écrire ainsi : $(X = 3) = \{(F, F, P)\}$.

L'objet de l'exercice est de déterminer la loi de X et son espérance.

1. Que vaut l'univers Ω et que vaut $X(\Omega)$?
2. Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$.
3. Peut-on en déduire une formule pour $P(X = n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
4. Calculer $E(X)$.

2 Introduction à la loi de Poisson

Il existe, dans la ville de Méanou, un carrefour bien signalisé où se produisent rarement des accidents. Cependant on dénombre en moyenne un accident tous les cents jours, soit 0.01 accident par jour. Une étude montre que les accidents sont tous indépendants les uns des autres, et qu'il ne peut pas y avoir plus d'un accident par jour. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accident total sur une année.

1. Expliquer pourquoi l'étude peut se voir comme une répétition de 365 schéma de Bernoulli. Quelle est alors la loi suivi par X ? Quelle est son espérance ? Sa variance ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun accident dans l'année ?
3. Sans la calculer donner la formule qui donnerait la probabilité qu'il y ait exactement 4 accidents à l'année ? Cette formule étant difficile à calculer, on admet que ce nombre est proche du nombre $e^{-3.65}\dfrac{3.65^4}{4!}$. Calculer alors la probabilité recherché.
4. Adapter la question précédente avec 7 accidents.

3 Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $0,2$.

1. Calculer $P([X = 3])$.
2. Calculer $P([X \leq 3])$.
3. Calculer $P([X \geq 4])$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 5.

1. Calculer $P([Y = 5])$.
2. Calculer $P([Y \leq 2])$.
3. Calculer $P([Y \geq 3])$.
4. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3

On tire au hasard et avec remise une boule dans une urne contenant trois boules noires et deux boules blanches. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche obtenue.

1. Donner la loi de X.
2. Représenter par un diagramme à barres la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

Soit X une loi de Poisson de paramètre 4.

1. Représenter graphiquement la loi de probabilité de X.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de k est-ce que $P([X = k])$ est maximal ?
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5

Un magasin reçoit 3 réclamations en moyenne par jour. On note X la variable aléatoire égale au nombre de réclamations en une journée. On suppose que X suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour que le premier lundi du mois prochain soient enregistrées :

1. 0 réclamation.
2. 2 réclamations.
3. 4 réclamations ou plus.

Exercice 6

Sur une autoroute, il y a en moyenne un accident par semaine. On considère que la variable aléatoire X égale au nombre de d'accidents sur cette autoroute en une semaine suit une loi de Poisson.
Quelle est la probabilité, pour une semaine donnée, qu'il y ait 4 accidents ou plus ?

Exercice 7

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.

1. On tire deux jetons au hasard : quelle est la probabilité de tirer deux jetons numérotés 2 ?
2. Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants).
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2.
   (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que $V(X) = 21^2$.
3. On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.
   (a) Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi classique .
   (b) En déduire $Y(\Omega)$ puis la probabilité $P(Y = k)$ pour tout entier k de $Y(\Omega)$.
   (c) Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z.
   (d) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

Extrait de ESC 2007

Exercice 8

Un joueur essaie de faire éclater un ballon avec des fléchettes. On suppose qu'il dispose d'un nombre infini de fléchettes, et il arrête ses essais lorsque le ballon éclate. À chaque tentative, indépendante des autres, il réussit avec la même probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

1. Quelle est la probabilité que le ballon éclate avec quatre fléchettes ou moins ?
2. Pour n entier naturel non nul, quelle est la probabilité qu'il faille plus de n fléchettes pour qu'il éclate ?

Exercice 9

Rappeler la définition de la loi uniforme à valeurs dans $[|1; n|]$.
Calculer l'espérance et la variance d'une telle loi.