Matrices 2 : exercices

1 Inverses de matrices 2×2

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

Exercice 2

Dire si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant déterminer leur inverse en appliquant la formule du cours.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   1. Montrer que $A^2 = 5A + I$.
   2. En déduire A^{-1}. Vérifier.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   1. Montrer que $B^2 = 2B + 2I$.
   2. En déduire B^{-1}. Vérifier.

2 Inverses de matrices 3×3

Exercice 4

Calculer l'inverse des matrices triangulaires ci-dessous :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Trouver l'inverse des matrices ci-dessous en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 6 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 9 \\ 15 & 2 & 22 \end{pmatrix}$

3 Systèmes

Exercice 6

On considère le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 2 \\ 3x & - & 4y & = & 2 \end{array}\right.$

1. Écrire le système sous forme matricielle $AX = B$.
2. Déterminer A^{-1}.
3. En déduire la solution du système. Vérifier.

Exercice 7

On considère le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & -1 \\ 4x & - & 7y & = & 5 \end{array}\right.$

1. Écrire le système sous forme matricielle $AX = B$.
2. Déterminer A^{-1}.
3. En déduire la solution du système. Vérifier.

4 Puissances de matrices

Exercice 8

1. Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Calculer D^{-1} et D^3.

2. Soit $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Calculer E^{-1} et E^4.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. A est-elle inversible ?

En utilisant la formule du binôme, calculer $(A + I)^n$ pour tout $n \geq 2$.

Matrices 2 : exercices

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice N telle que $A = M + N$, et calculer N^2.
2. Exprimer M^n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire, à l'aide de la formule du binôme, l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 11

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.
   Conjecturer l'expression de A^n pour tout entier n et la prouver au moyen d'un raisonnement par récurrence.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 et B^3.
   Conjecturer l'expression de B^n pour tout entier n et la prouver au moyen d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 12

On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit PQ.
2. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
3. Vérifier la relation $AP = PD$.
4. Établir par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n sous forme explicite.

(Extrait de ESCP 2016)