Exercices : suites

1 Calculs de termes

Exercice 1 (*Calculer des termes d'une suite*)

Si (u_n) est une suite définie par $u_n = n^2 - n + 41$ (formule de Marcel Pagnol)

1. Calculer u_0, u_1,...u_{10} (Calculatrice autorisée)
2. Marcel Pagnol (Ecrivain français , 1895-1974) pensait que sa formule ne produisait que des nombres premiers c'est à dire des nombres qui ne sont pas décomposables comme un produit de nombres plus petits que lui.
   (Exemple : 6 n'est pas premier car $6 = 2 \times 3$ mais 7 est premier).
   Calculer u_{41} et en déduire que Marcel Pagnol avait tort.

Exercice 2 (*Problème inverse : deviner une formule*)

Voici quelques suites de nombres où on a donné quelques premiers termes :

1.	$u_0 = 0$	$u_1 = \dfrac{1}{2}$	$u_2 = \dfrac{2}{3}$	$u_3 = \dfrac{3}{4}$	$u_4 = \dfrac{4}{5}$	*etc.*	
2.	$u_0 = -2$	$u_1 = -1$	$u_2 = 0$	$u_3 = 1$	$u_4 = 2$	*etc.*	
3.	$u_0 = -2$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 7$	$u_4 = 10$	*etc.*	
4.	$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 8$	$u_3 = 16$	$u_4 = 32$	*etc.*	
5.	$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 5$	$u_3 = 10$	$u_4 = 17$	*etc.*	
6.	$u_0 = 0$	$u_1 = 3$	$u_2 = 8$	$u_3 = 15$	$u_4 = 24$	$u_5 = 35$	*etc.*

Dans chaque cas :

1. Deviner les deux ou trois termes u_5, u_6, u_7 ;
2. Deviner une formule qui donne u_n en fonction de n.

2 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3

1. Poursuivre la suite arithmétique :
   -7 -3 1 5 ... ...
2. Poursuivre la suite géométrique :
   0,5 -1 2 -4 ... ...

Exercice 4

Un pépiniériste vend des bananiers de 35 cm de haut et annonce qu'ils grandissent de 8 cm par mois.

Exprimer la hauteur u_n d'un bananier au bout du $n^{\text{ième}}$ mois.
En combien de temps ce bananier dépassera-t-il 1 mètre de hauteur ?

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $r = 3$, et $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}2$.
Comparer u_{10} et v_{10}, puis u_{100} et v_{100}.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$ pour tout entier naturel n.
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

Exercice 7

Un capital de 8000 euros est placé au taux annuel de 3,5% de rémunération.
Quelle est la valeur du capital après cinq ans ?
En combien d'années ce capital pourrait-il doubler ?

Exercice 8

Pour chaque suite (u_n), donner l'expression du terme u_{n+1} :

a) $u_n = 3 - 2n$ b) $u_n = n^2 - 1$ c) $u_n = \dfrac{2}{n+1}$

Exercice 9

1. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_4 = 5$ et $u_{11} = 19$.
   Calculer la raison r et le premier terme u_0 de cette suite.
2. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_2 = 1$ et $v_7 = 32$.
   Calculer la raison q et le premier terme v_0 de cette suite.

3 Calculs de sommes

Exercice 10

Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}(2k+1)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}k^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}$

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3k-2)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-4k)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^k$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$

4 Récurrence

Exercice 12

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 13

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner une expression des trois premiers termes de la suite.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

   Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{2 + v_n}$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 < v_n \leq 1$.

Exercice 14

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

5 Suites arithmético-géométriques

Exercice 15

1. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
   (b) Exprimer le terme général de la suite en fonction de n.
2. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
   (b) Exprimer le terme général de la suite en fonction de n.

Exercice 16

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.
1$^{\text{er}}$ contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.
2$^{\text{ème}}$ contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36$^{\text{ème}}$ mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs).

6 Activité de groupe.

Une personne reçoit 200 000 euros en héritage. Le 1er janvier 2020 elle a placé cette somme au taux annuel de $7,5\%$.

1. En supposant que les intérêts sont réinvestis tous les ans, de quelle somme dispose cette personne au 1er janvier 2021 ? au 1er janvier 2022 ?
2. Trouver une formule qui exprime la valeur du capital accumulé l'année n en fonction de la valeur du capital accumulée en $n-1$.
3. Trouver une formule qui exprime la valeur du capital accumulé à l'année $2020+n$ en fonction de la durée du placement n. En déduire la valeur du capital au bout de 12 ans.
4. Reprendre les questions $1, 2$ et 3 en supposant que le capital n'est pas réinvesti.
5. Selon vous, laquelle de ces deux solutions produit le placement le plus favorable :
   - Les intérêts sont réinvestis (intérêts composés)
   - Les intérêts ne sont pas réinvestis (intérêts simples)
6. Une publicité annonce : "Gagnez de l'argent avec le placement G -Epargne" qui double votre capital en 12 ans !
   (a) Ce placement est-il plus intéressant que le précédent ? (on supposera que les intérêts sont composés).
   (b) Déterminer le taux d'intérêt annuel du placement G-Epargne, sachant qu'il s'agit d'un placement à intérêts composés.