Fonctions 2 : intégrales

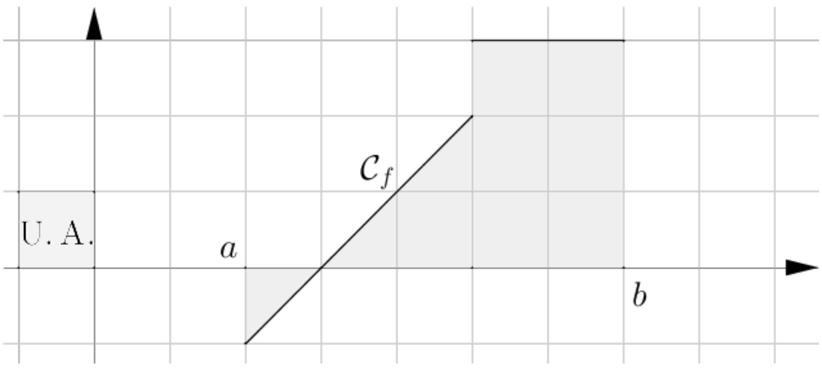
$$Life = \int_{birth}^{death} \frac{happiness}{time} \Delta time$$

1 Intégrale d'une fonction

Définition.

Étant donnée une fonction f définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a;b]$, on appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(x)dx$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, comptée positivement lorsque la fonction est positive, et négativement sinon.

Exemple : L'intégrale de la fonction f représentée ci-dessous entre 2 et 7 a pour valeur 7,5 unités d'aire.
On écrit $\int_2^7 f(x)dx = 7,5$.

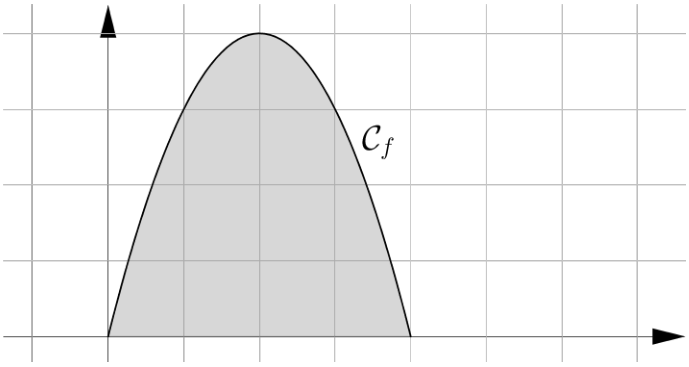


Théorème fondamental.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, et F une primitive de f sur cet intervalle.
Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple : Soit f définie sur $[0;4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.



Une primitive F de f est $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

Donc $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx = F(4) - F(0) = -\frac{64}{3} + 32 - 0 = \frac{32}{3} \approx 10,7$ arrondie au dixième près.

2 Intégrale généralisée

Intégrale généralisée.

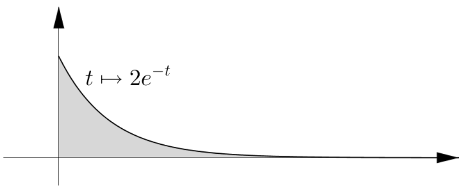
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; +\infty[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$.

Exemple : Considérons l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} (2e^{-t})dt$.

Pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x (2e^{-t})dt = \left[-2e^{-t}\right]_0^x = -2e^{-x} - (-2) = 2 - 2e^{-x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2 - 2e^{-x}) = 2$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (2e^{-t})dt$ converge et a pour valeur 2.



De même, lorsque la limite existe,

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

3 Cas des fonctions positives

Théorème.

Soient f et g deux fonctions définies, continues par morceaux et positives sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$, telles que pour tout $x \in [a;+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge aussi.

Exemple : Considérons l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$.

Nous ne connaissons pas la primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$.

Mais pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{1}{t^2+1} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Les deux fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ et $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont définies, continues et positives sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Or $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$,

donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge,

donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ converge aussi.

De même, si f et g sont deux fonctions définies, continues par morceaux et positives sur un intervalle de la forme $]-\infty;b]$, telles que pour tout $x \in]-\infty;b]$, $f(x) \leq g(x)$,

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ converge aussi.