Mémoire de Master 2

Espaces de Banach et espaces d'opérateurs injectifs

Sous la direction de C.Le Merdy

DA SILVA Alban

19 juillet 2006

Ce mémoire de Master 2 a été réalisé par le biais du centre de télé-enseignement de la faculté de Besançon. La discipline fondamentale choisie est l'analyse fonctionnelle.

Je tiens en premier lieu à remercier chaleureusement Christian Le Merdy, tout d'abord pour m'avoir aiguillé rapidement vers ce sujet extrêmement intéressant qu'est la notion d'espace injectif. Il m'a permis d'éfleurer ce que représente un travail de recherche en mathématiques.

Je tiens ensuite à le remercier, pour avoir tenu compte de mon éloignement géographique : ses réponses rapides à mes mails, ses re-lectures, ses critiques constructives et ses encouragements ont été un grand soutien mathématique et moral, et ont presque effacé les 20000 km nous séparant.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier ma femme pour sa patience, et l'abnégation dont elle a fait preuve pour que je puisse travailler les week-end, et souvent tard le soir. Sans elle et mon fils, ce travail qui leur est dédié, n'aurait sans doute pas eu lieu.

INTRODUCTION :

Le fil conducteur de ce mémoire est la notion d'espace **injectif**.
L'injectivité est un terme de catégorie : Si on se donne une catégorie C d'objets et de morphismes, alors un objet I est dit **injectif** si pour toute paire d'objets $E \subseteq F$ et tout morphisme $\phi : E \to I$, il existe un morphisme $\psi : F \to I$ qui étend ϕ, c'est à dire tel que $\psi(e) = \phi(e)$ pour tout $e \in E$.

Dans un premier temps nous allons examiner la catégorie des espaces de Banach où les morphismes sont les applications linéaires contractantes. Par un simple changement d'échelle, on voit qu'être injectif dans cette catégorie équivaut à être injectif dans la catégorie des espaces de Banach où les morphismes sont les applications linéaires continues (opérateurs bornés), mais où l'extension ψ a **la même norme** que ϕ. La second chapitre est donc consacré à la caractérisation de ces espaces de Banach injectifs. Le principal résultat de cette partie est le théorème 2.18 de Nachbin-Goodner-Kelley : Si X est un espace de Banach,

X **injectif** $\Leftrightarrow$ X **est isométrique à un** $C(T)$ **où** T **est un compact stonéen.**

Dans un second temps nous examinerons la catégorie des espaces d'opérateurs où les morphismes sont les applications linéaires complètement contractantes. De la même manière par un simple changement d'échelle, on voit qu'être injectif dans cette catégorie équivaut à être injectif dans la catégorie des espaces d'opérateurs où les morphismes sont les applications linéaires complètement bornées, mais où l'extension ψ a **la même norme** $\|.\|_{cb}$ que ϕ. Le troisième chapitre est donc consacré à la caractérisation de ces espaces d'opérateurs injectifs. Le principal résultat de cette partie est le théorème 3.11 de Ruan : Si E est un espace d'opérateurs ,

E **est injectif** $\Leftrightarrow$ **Il existe une C*-algèbre injective A, deux projections** p **et** q **de A telles que** E **soit complètement isométrique à** pAq**.**

Mais tout d'abord, nous allons donner quelques résultats de nature topologique sur les espaces compacts stonéens.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires topologiques

Dans le but de caractériser les espaces de Banach qui ont la propriété d'extension nous devons nous intéresser à la notion d'espace topologique **Stonéen** (ou **extrêmement discontinue**), pour lesquels on pourra se reporter à **[1]**.
Au préalable il est bon de rappeler le procédé de compactification de Stone-$\check{C}$ech.
Tous les espaces topologiques considérés seront supposés séparés.

1.1 Compactification de Stone-$\check{C}$ech

Définition 1.1 (Compactifié de Stone-$\check{C}$ech)
Soit (E, τ) un espace topologique normal [1].
On dit que K compact est le ***compactifié de Stone-$\check{C}$ech*** *de E (et on le note βE) si :*

(i) $\exists \beta : E \to D$, où β est un homéomorphisme sur D espace dense dans βE.

(ii) Pour toute fonction $f \in C_b(E, \mathbb{R})$, $f \circ \beta^{-1} : D \to \mathbb{R}$ possède un unique prolongement continue (noté βf) à βE tel que

$$\sup_{t \in E} |f(t)| = \sup_{t \in \beta E} |\beta f(t)|$$

Autrement dit E est (à homéomorphisme près) dense dans son compactifié de Stone-$\check{C}$ech. Dans la suite on confondra donc E et $\beta(E)$.
On a de suite un théorème d'existence et d'unicité :

Théorème 1.2 (Existence et unicité)
Il existe un couple (E,βE) répondant aux conditions de la définition 1.1, unique à homéomorphisme près au sens suivant :
Si (E',$\beta E'$) est un autre couple satisfaisant aux même conditions, il existe un homéomorphisme ϕ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & \beta E' \arrow[d, "\phi"] \\ E \arrow[ur, "\beta'"] \arrow[r, "\beta"'] & \beta E \end{tikzcd}$$

Preuve.
Pour l'unicité on pourra consulter **[5]** page 240 et pour l'existence on a la construction suivante :

[1] un espace où tous fermés A et B disjoints peuvent être séparés par des ouverts

Soit E un espace topologique normal et l'espace de Banach $X = (C_b(E, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Soit $\beta : E \to (X^*)_1$ définie par $\beta(t)(f) = f(t)$.

Alors :

- β est clairement **w-$*$ continue**.
- β est **injective** :
  Si $t_1 \neq t_2$, alors d'après le lemme d'Urysohn appliqué aux fermés $\{t_1\}$ et $\{t_2\}$, il existe $f \in X$ telle que $f(t_1) = 1$ et $f(t_2) = 0$, et donc $\beta(t_1) \neq \beta(t_2)$.

- β est un **homéomorphisme** de E sur $\beta(E)$:
  Soit (t_α) une suite généralisée indexée sur un ensemble filtrant, telle que t_α ne tend pas vers t dans E. Montrons que $\beta(t_\alpha)$ ne tend pas vers $\beta(t)$.
  Puisque t_α ne tend pas vers t, il existe $\mathcal{U}$ voisinage de t tel que : $\forall d$, $\exists j(d) \geq d$ tel que $t_{j(d)} \notin \mathcal{U}$.
  On applique le Lemme d'Urysohn : Il existe $f \in X$ telle que f(t)=1 et f(s)=0 pour $t \in E \backslash \mathcal{U}$. Alors $\forall d$, $f(t_{j(d)}) = 0$.
  Donc la suite $(f(t_\alpha))$ ne peut converger vers $f(t) = 1$.
  Ceci montre que $\beta(t_\alpha)$ ne tend pas w-$*$ vers $\beta(t)$.

On pose $\boxed{\beta E = \overline{\beta(E)}^{w-*}}$.

Alors :

(i) βE est compact comme fermé dans $(X^*)_1$ qui est compact d'après le théorème de Banach-Alaoglu.

(ii) Pour $f \in X$, on prolonge $f \circ \beta^{-1}$ à βE par βf de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \beta f : \beta E & \to & \mathbb{R} \\ x^* & \mapsto & x^*(f) \end{array}$$

- βf est clairement **w-$*$ continue**.
- C'est bien un **prolongement** car si $x^* = \beta(t)$:

$$\beta f(x^*) = \beta(t)(f) = f(t) = f \circ \beta^{-1}(x^*)$$

- De plus : $|\beta f(x^*)| = |x^*(f)| \leq \|x^*\|.\|f\|_\infty$. Donc $\|\beta f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, et comme $\|\beta f\|_\infty \geq \|f\|_\infty$:

$$\|\beta f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Ainsi :

$$\boxed{\beta\text{E est le compactifié de Stone-}\check{C}\text{ech de E}}.$$

Donnons maintenant une propriété utile de prolongement :

Propriété 1.3 *Toute fonction continue $f : E \to C$, où E est normal et C est compact admet un unique prolongement continu $\beta f : \beta E \to C$.*

Preuve.

E est normal donc il s'injecte dans un $[0,1]^J$ pour J convenable (voir **[5]** page 217, th.34.2).

On regarde donc C comme un sous ensemble de $[0,1]^J$.

On définit alors pour $\alpha \in J$, f_α par : $\begin{array}{rcl} f_\alpha : E & \to & [0,1] \\ t & \mapsto & f(t)(\alpha) \end{array}$

f étant continue, f_α est continue ($[0,1]^J$ étant muni de sa topologie produit), et admet donc un unique prolongement continu $\beta f_\alpha : \beta E \to \mathbb{R}$.
On définit alors βf par : $\begin{array}{rcl} \beta f_\alpha : \beta E & \to & C \\ t & \mapsto & (\beta f_\alpha(t))_{\alpha \in J} \end{array}$

βf_α est bien continue et elle est bien à valeur dans C car :

$$\beta f(\beta E) = \beta f(\overline{E}) \subseteq \overline{\beta f(E)} = \overline{f(E)} \subseteq \overline{C} = C \, \square$$

Passons maintenant à l'étude et à la caractérisation des espaces topologiques Stonéens :

1.2 Espaces Stonéens

Définition 1.4 (Espace Stonéen)
Un espace topologique Ω est dit ***Stonéen*** *(ou* ***extrêmement discontinue*** [1]*), si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de Ω, $\overline{\mathcal{U}}$ est encore ouvert.*

On a une propriété simple caractérisant ces espaces :

Propriété 1.5 Ω *Stonéen* $\Longleftrightarrow [\forall\ \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ *ouverts,* $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset \Rightarrow \overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2} = \emptyset]$

Preuve.
On pourra se référer à **[6]** page 196.

1.3 Espaces libres

Définition 1.6 (Espace libre)
Un espace ***compact*** *est dit* ***libre****, s'il est le compactifié de Stone-Čech de ses points isolés.*

On peut dire de manière équivalente :

Un compact P est libre $\Leftrightarrow$ P le compactifié de Stone-Čech d'un ensemble discret.

En effet l'ensemble D des points isolés de P est discret et réciproquement si P est libre, il contient un ensemble T discret tel que $\beta T = P$. Mais puisque $T \subseteq D$, $\beta D = P$. $\square$.

Propriété 1.7 *Un espace libre est Stonéen.*

Preuve.
Soit $\mathcal{U}$ ouvert dans K espace libre.
On note D=\{points isolés de K\}, et on a donc $K = \beta D$.
Alors $\mathcal{U} \cap D$ est un *ouvert* de D qui est aussi *fermé* :
Soit en effet x dans $\overline{\mathcal{U} \cap D}$ (fermeture dans D).
Puisque x est isolé dans K donc dans D il existe $\mathcal{V}$ voisinage de x tel que $\mathcal{V} \cap D = \{x\}$.
Or $\mathcal{V} \cap [\mathcal{U} \cap D]$ n'est pas vide, donc x est dans $\mathcal{U}$ donc dans $\mathcal{U} \cap D$.
Ceci montre que $\mathbf{1}_{[\mathcal{U} \cap D]}$ est continue sur D, et admet donc un prolongement continue

[1] Dans un tel espace toute partie non vide connexe est réduite à un point

à $\beta D = K$.
Or $\mathbf{1}_{[\mathcal{U}\cap D]}$ est la restriction à D de $\mathbf{1}_{\overline{\mathcal{U}}}$.
En effet soit $x \in D$, montrons que $x \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x \in \overline{\mathcal{U}}$:
Soit $x \notin \mathcal{U}$ et soit $\mathcal{V}$ voisinage de x tel que $\mathcal{V} \cap K = \{x\}$. Alors $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Donc $x \notin \overline{\mathcal{U}}$.
L'autre implication est évidente.

Ceci montre que $\beta\mathbf{1}_{[\mathcal{U}\cap D]} = \mathbf{1}_{\overline{\mathcal{U}}}$.

Donc $\mathbf{1}_{\overline{\mathcal{U}}}$ est continue, donc $\overline{\mathcal{U}}$ est *ouvert.* □

1.4 Espaces projectifs

Définition 1.8 (Espaces projectifs)
Un espace ***compact*** *P est dit* ***projectif*** *si, pour tout compacts S et T, pour toutes applications $f : S \to T$, $g : P \to T$ continues, f surjective, il existe une application continue $h : P \to S$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$

Le principal résultat de ce chapitre est que pour P compact :

$$\boxed{P\,\text{Stonéen} \Longleftrightarrow P\,\text{projectif}}$$

Propriété 1.9
(i) E libre $\Longrightarrow$ E projectif
(ii) Tout compact est l'image continue d'un espace libre.

Preuve.
(i) Soient P un espace libre, S et T compacts, deux applications $f : S \to T$, $g : P \to T$ continues, f surjective.
On note D={ points isolés de K }, et on a donc $K = \beta D$.
Puisque f est surjective, $\forall p \in D$, $\exists\, s_p \in S / f(s_p) = g(p)$.
On définit alors h_0 par : $\begin{array}{rcl} h_0 : D & \to & S \\ p & \mapsto & s_p \end{array}$

Etant définie sur un ensemble de points isolés, cette application est continue.

On a $f \circ h_0 = g_{|D}$. En considérant le prolongement continue (prop 1.3) $\beta h_0 := h$ de h_0 à $\beta D = P$, cette égalité se prolonge en $f \circ h = g$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$

Donc P est bien projectif.

(ii) Soit K compact, D un espace dense dans K.
Muni de sa topologie discrète, D est...discret !

Alors $\begin{array}{rccc} f: & D & \rightarrow & K \\ & t & \mapsto & t \end{array}$ est continue (D est muni de la topologie discrète) et admet donc un prolongement continue βf (prop 1.3) surjectif puisque $\beta f(d) = d$ pour $d \in D$ implique $\beta f(t) = t$ pour $t \in K$ par densité. □

Par exemple tout espace séparable est l'image continue de $\beta\mathbb{N}$.

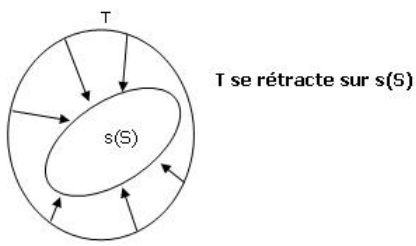
Passons maintenant à le description d'un autre type d'espace :

1.5 Espace rétracte

Définition 1.10 (Rétracte)
*Un espace topologique S est un **rétracte** d'un espace T s'il existe une fonction continue $r : T \to S$ et $s : S \to T$ homéomorphisme de S sur son image, tels que $r \circ s = Id_{|S}$.*

Autrement dit l'espace S est homéomorphe à $s(S)$ et il existe $u : T \to s(S)$ telle que $u(t) = t$ pour tout $t \in s(S)$ (prendre $u = s \circ r$).

C'est la définition que l'on utilise en topologie algébrique. La figure suivante montre cette situation.



La notion d'espace rétracte donne une caractérisation des espaces projectifs :

Propriété 1.11
Soit P un espace compact. Alors P projectif $\Longleftrightarrow$ P est le rétracte d'un espace libre.

Preuve.
$\Leftarrow$: Soient S et T deux compacts et deux applications $f : S \to T$, $g : P \to T$ continues, f surjective.
Puisque P est un rétracte de Q espace libre, il existe un homéomorphisme $s : P \to Q$ et une application continue $r : Q \to P$ tels que $r \circ s = Id_{|S}$. Alors $g \circ r : Q \to T$ et puisque Q est projectif, il existe h telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ Q \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g\circ r"'] & T \end{tikzcd}$$

Donc si on compose par s dans ce diagramme on obtient :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, "h\circ s"] \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$

Donc P est projectif.

$\Rightarrow$: P projectif donc est l'image continue par r de βT, où T est discret (cf prop 1.9 (ii)). Alors il existe s tel que le digramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & \beta T \arrow[d, "r"] \\ P \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "Id"'] & P \end{tikzcd}$$

Donc $r \circ s = Id_{|P}$ et s est donc injective ($s(t_1) = s(t_2) \Rightarrow r \circ s(t_1) = r \circ s(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$). Et puisque P est compact, s est un homéomorphisme de P sur son image. Ainsi P est un rétracte de βT. □

1.6 Applications minimales

Avant d'aller plus loin on a besoin d'une définition supplémentaire :

Définition 1.12 (Application minimale)
Soient P et T compacts, $f : P \to T$ surjective, continue.
*f est dite **minimale** si $\forall\, F$ fermé $\subsetneq P$, $f(F) \subsetneq T$*

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.13
Tout compact T est l'image continue d'un espace projectif P par une application minimale f.
De plus (P, f) est unique, au sens où si (P', f') est telle que $f' : P' \to T$ est continue, surjective et minimale alors il existe un homéomorphisme g qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "f'"] \\ P \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

La preuve nécessite un lemme :

Lemme 1.14 *Si K est compact, $f : K \to K$ continue, $f \neq Id_K$, alors :*

$$\exists\, F \subsetneq K \,/\, F \cup f^{-1}(F) = K.$$

Preuve.
Soit $t \in K$, $f(t) \neq t$. K est séparé donc il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ tels que $t \in \mathcal{U}$ et $f(t) \in \mathcal{V}$.
Puisque f est continue, quitte à restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer que $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$.
Prenons alors $F = K \backslash \mathcal{U}$.
Alors : $z \notin F \Rightarrow z \in \mathcal{U} \Rightarrow f(z) \in \mathcal{V} \Rightarrow f(z) \notin \mathcal{U} \Rightarrow f(z) \in F \Rightarrow z \in f^{-1}(F)$.
Donc $F \cup f^{-1}(F) = K$. □

Passons maintenant à la preuve du théorème 1.13.

Preuve du théorème 1.13.
Soit S un espace discret et f_0 continue tels que $f_0 : \beta S \to T$ soit surjective **[prop 1.9 (ii)]**.
Montrons l'existence d'un sous ensemble fermé $P \subset \beta S := K$ tel que $f(P) = T$, **minimal**.
Pour cela on applique le lemme de Zorn à l'ensemble de ces fermés en montrant qu'il est inductif.

On considère un ensemble (non vide) A totalement ordonné de fermés $F \subset K$ tels que $f_0(F) = T$. Soit G leur intersection. C'est un ferme de K et il suffit donc de verifier que $f(G) = T$.

Pour cela, considerons $t \in T$. Pour chaque $F \in A$, soit F' l'ensemble des $x \in F$ tels que $f_0(x) = t$.
Par hypothèse, F' est non vide. Puisque A est totalement ordonné, toute intersection finie d'éléments de A est un élément de A donc toute intersection finie d'ensembles F' est non vide.
Par ailleurs chaque F' est fermé car f est continue. Comme K est compact, cela implique que l'intersection de tous les F' est non vide. Ce qui signifie qu'il existe $x \in G$ tel que $f_0(x) = t$.

Donc il existe P minimal, fermé dans βS donc compact.
Soit alors $f = f_{0|P}$ qui est minimale par construction de P.
Montrons alors que P est un rétracte de βS, ce qui montrera que P est projectif **[prop 1.11]** :
Puisque $P \subseteq \beta S$, il suffit de montrer qu'il existe $r : \beta S \to P$ continue telle que $r_{|P} = Id$.
On sait que βS est projectif **[prop 1.9 (i)]**, donc il existe r continue tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ \beta S \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "f_0"'] & T \end{tikzcd}$$

Notons $g = r_{|P}$. On a $f \circ r_{|P} = f_{0|P}$ donc $f \circ g = f$.
Si $g \neq Id$ alors en appliquant le **lemme 1.14**, on peut trouver F fermé tel que $F \subsetneq P$ et $F \cup g^{-1}(F) = P$.
On a alors $g(g^{-1}(F)) \subseteq F$ donc en composant par f, $f(g^{-1}(F)) \subseteq f(F)$.
Or $f(F) \cup f(g^{-1}(F)) = f(P) = T$.
Donc $f(F) = T$, impossible car $F \subsetneq P$.
Donc P est projectif et l'unicité est alors évidente. □

On peut alors passer au théorème central de cette première partie, dont la preuve nécessite deux lemmes :

Théorème 1.15 (Gleason)
Soit P compact. Alors :

$$\textbf{\textit{P projectif}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{P stonéen}}$$

Lemme 1.16 *Soit S et T compact, $f : S \to T$ surjective minimale. Alors :*

$$\mathcal{U} \subsetneq S \Rightarrow f(\mathcal{U}) \subseteq \overline{T \backslash f(S \backslash \mathcal{U})}$$

Preuve.
On raisonne par l'absurde : soit x dans $f(\mathcal{U})$ tel que $x \notin \overline{T \backslash f(S \backslash \mathcal{U})}$.
Alors il existe $\mathcal{V}$ voisinage de x tel que $\mathcal{V} \cap [T \backslash f(S \backslash \mathcal{U})] = \emptyset$, ce qui donne en passant aux complémentaires que $[T \backslash \mathcal{V}] \cup f(S \backslash \mathcal{U}) = T$.
Puisque f est continue en x , il existe $\mathcal{O}$ que l'on peut supposer inclus dans $\mathcal{U}$ tel que $f(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{V}$.
Il est alors évident que $f(S \backslash \mathcal{O}) = T$. En effet, si $t \in T$ alors :
- Si $t \in f(S \backslash \mathcal{U})$ alors $t \in f(S \backslash \mathcal{O})$ car $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$.
- Si $t \in T \backslash \mathcal{V}$ alors il existe y dans S tel que $t = f(y)$ et y n'est pas dans $\mathcal{O}$ car sinon $t = f(y)$ appartiendrait à $f(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{V}$.

Donc $f(S\backslash\mathcal{O}) = T$, ce qui contredit la minimalité de f. $\square$

Lemme 1.17 *Soit S compact et T Stonéen.*
Si $f : S \to T$ est minimale, alors c'est un homéomorphisme.

Preuve.
Puisque S est compact, il suffit de montrer que f est injective.
Par l'absurde : Soient $s_1 \neq s_2$ tels que $f(s_1) = f(s_2)$.
Soient alors $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ tels que $s_1 \in \mathcal{U}_1$, $s_2 \in \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.
Alors $T\backslash f(S\backslash\mathcal{U}_1)$ et $T\backslash f(S\backslash\mathcal{U}_2)$ sont ouverts et disjoints.
Donc d'après la propriété 1.5, leurs fermetures sont disjointes.
D'après le lemme 1.16, $f(s_1) \in \overline{T\backslash f(S\backslash\mathcal{U}_1)}$ et $f(s_2) \in \overline{T\backslash f(S\backslash\mathcal{U}_2)}$ ce qui est absurde.$\square$

On passe maintenant à la preuve du théorème 1.15 :

Preuve du théorème 1.15.

$\Leftarrow$: Soit P Stonéen. D'après le théorème 1.13, P est l'image continue d'un espace projectif Q par une application minimale.
D'après le lemme 1.17, c'est un homéomorphisme. P est donc homéomorphe à un espace projectif. Il l'est donc lui-même (vérification aisée).

$\Rightarrow$: Soit P projectif, et $\mathcal{U}$ ouvert dans P.
Posons :

$$S = P \times \{a, b\}$$
$$T = [(P\backslash\mathcal{U}) \times \{a\}] \cup [\overline{\mathcal{U}} \times \{b\}] \text{ (union disjointe)}$$

On remarque que T est fermé dans S compact donc compact. Et si on considère π_1 la première projection de S sur P, sa restriction à T est clairement surjective.
Puisque P est projectif il existe alors f qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "\pi_1"] \\ P \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "Id"'] & P \end{tikzcd}$$

On a donc $\pi_1 \circ f = Id$ et donc si on pose $f(s) = (f_1(s), f_2(s))$, clairement $f_1(s) = s$.
Soit $s \in \mathcal{U}$ alors $(s, f_2(s)) \notin [(P\backslash\mathcal{U}) \times \{a\}]$ donc $(s, f_2(s)) \in \mathcal{U} \times \{b\}$ et $f_2(s) = b$.
Par continuité $f_2(s) = b$ pour $s \in \overline{\mathcal{U}}$.
De même si $s \in P\backslash\mathcal{U}$, $f_2(s) = a$.
On a alors :

$$f(s) = \begin{cases} (s, a) \text{ si } s \in P\backslash\mathcal{U} \\ (s, b) \text{ si } s \in \overline{\mathcal{U}} \end{cases}$$

On remarque alors que $\overline{\mathcal{U}} \times \{b\}$ est ouvert dans T car son complémentaire $(P\backslash\mathcal{U}) \times \{a\}$ est fermé.
Alors $\overline{\mathcal{U}} = f^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \{b\})$ est ouvert dans P qui est donc Stonéen.$\square$

Chapitre 2

Espaces de Banach injectifs

Tous les espaces considérés seront des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
Dans ce chapitre, on définit et on caractérise les espaces de Banach injectifs.

2.1 Definitions et premiers exemples

Définition 2.1 (Propriété de λ-extension)
*On dit qu'un espace de Banach Z a la propriété de λ-**extension**, si pour tout espaces de Banach X et Y, pour toute isométrie $\Psi : X \to Y$ et pour toute application linéaire bornée $L : X \to Z$, il existe $\widetilde{L} : Y \to Z$ tel que $\|\widetilde{L}\| \leq \lambda \|L\|$ et tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\widetilde{L}"] \\ X \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "L"'] & Z \end{tikzcd}$$

C'est le cas particulier $\lambda = 1$ qui va mener notre propos :

Définition 2.2 (Espaces injectifs)
*Les espaces de Banach qui ont la propriété de 1-extension sont dits **injectifs**. Dans ce cas on a $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$*

La caractérisation de tels espaces pour $\lambda > 1$ est un problème qui reste encore ouvert. Donnons quand même, avant d'écarter définitivement le cas $\lambda > 1$, le résultat suivant dû à Sobczyk [1941] (pour plus de détails voir [7] page 106) :

c_0 à la propriété de 2-extension séparable [1]

Donnons maintenant des exemples simples d'espaces de Banach injectifs :

1. **Le théorème de Hahn-Banach montre que $\mathbb{C}$ est un espace injectif** : Si X et Y sont des Banach, $\Psi : X \to Y$ une isométrie et si $L : X \to \mathbb{C}$ est une application linéaire bornée, alors on peut prolonger $L \circ \Psi^{-1} : \Psi(X) \to \mathbb{C}$ à $\widetilde{L} : Y \to \mathbb{C}$ telle que $\|L \circ \Psi^{-1}\| = \|L\| = \|\widetilde{L}\|$. On a alors clairement $\widetilde{L} \circ \Psi = L$.

[1] ie qui a la propriété de λ-extension mais pour des Banach séparables.

2. On peut se demander alors si $\mathbb{C}^n$ pour n entier ou même $\mathbb{C}^I$ pour un ensemble I, sont injectifs ?
   La réponse est oui pour n entier mais pour I quelconque, il faut introduire : $\ell_I^\infty = \{(\alpha_i)_{i\in I} \text{ bornée }, \alpha_i \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^I$ qui, muni de la norme infinie, est un espace de Banach.

   C'est un espace injectif :
   En effet soient X et Y Banach, $\Psi : X \to Y$ une isométrie et $L : X \to \ell_I^\infty$ linéaire continue.
   Pour $i \in I$, $\begin{array}{rcl} L_i : X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & [u(x)]_i \end{array}$ est évidemment linéaire continue ($\|L_i\| \leq \|L\|$).
   Il existe donc $\widetilde{L_i} : Y \to Z$ telle que $\widetilde{L_i} \circ \Psi = L_i$ et $\|\widetilde{L_i}\| = \|L_i\|$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\widetilde{L_i}"] \\ X \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "L_i"'] & Z \end{tikzcd}$$

   On peut alors définir $\begin{array}{rcl} \widetilde{L} : Y & \to & \ell_I^\infty \\ y & \mapsto & (\widetilde{L_i}(y))_{i\in I} \end{array}$
   On a clairement $\widetilde{L} \circ \Psi = L$ et :

$$\|\widetilde{L}\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|(\widetilde{L_i}(y))_{i\in I}\|_\infty = \sup_{\|y\|\leq 1} \sup_{i\in I} |\widetilde{L_i}(y)| = \sup_{i\in I} \sup_{\|y\|\leq 1} |\widetilde{L_i}(y)| = \sup_{i\in I} \|\widetilde{L_i}\| = \sup_{i\in I} \|L_i\| \leq \|L\|$$

   Donc $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$ et la propriété est démontrée.

3. L'espace ℓ_I^∞ étant de la forme $L^\infty(\Omega, \mu)$ où $\Omega = I$ et μ la mesure de comptage, on peut se demander si un espace de la forme $L^\infty(\Omega, \mu)$ est injectif ? La réponse est oui si $L^1(\Omega, \mu)^* = L_\infty(\Omega, \mu)$ et sera développée en annexe.
4. Enfin, plus généralement, le cas précédent étant celui d'une C^*-algèbre commutative unitale, donc un espace de la forme $C(K)$ où K est compact (théorème de Gelfand), on peut se demander : **à quelle condition $C(K)$ est injectif ?** On donne ici une réponse partielle, qui sera complétée par le théorème 2.5 :

Théorème 2.3 (Philips)
Soit T un espace topologique discret, alors $C(\beta T)$ est injectif.

Preuve.
Puisque T est discret, T est clairement normal, donc l'application $\begin{array}{rcl} \Phi\colon C_b(T) & \to & C(\beta T) \\ f & \mapsto & \beta f \end{array}$
est une isométrie linéaire (cf **Théorème 1.2**), et puisque T est discret $C_b(T) = \ell_T^\infty$ qui, d'après l'**exemple 2** donné en **2.1** est injectif.
D'après la propriété 2.4 (ii), $C(\beta T)$ est injectif.□

Avant de poursuivre plus loin nous allons donner quelques résultats utiles pour la suite de notre propos :

Propriété 2.4
(i) Tout espace de Banach s'injecte isométriquement dans un espace de Banach injectif.

(ii) Si X est injectif et si $\Phi : X \to Y$ est un isomorphisme tel que $\|\Phi\|.\|\Phi^{-1}\| = 1$ alors Y est injectif. Donc un espace isométrique à un espace injectif est injectif.

(iii) Si X est injectif et si p est une projection telle que $\|p\| = 1$ (qui est équivalent à dire que p est contractante), alors $Y = p(X)$ est injectif.

Preuve.

(i) Soit X espace de Banach et $K = (X^*)_1$ la boule unité du dual de X muni de la topologie préfaible .
Soit $j : X \to C(K)$ définie par $j(z)(\varphi) = \varphi(z)$ pour $j \in Z$ et $\varphi \in K$, où $C(K)$ est muni de $\|.\|_\infty$.
C'est une isométrie linéaire : $\|j(z)\|_\infty = \sup\limits_{\varphi \in (X^*)_1} \|\varphi(z)\| = \|z\|$ (ce dernier fait étant bien connu).
Puisque K est compact, $C(K) \subset \ell^\infty_K$ qui est un espace injectif comme nous l'avons vu précédemment, ce qui répond à la question.

(ii) Soit Z et Z' deux espaces de Banach et $\psi : Z \to Z'$ une isométrie, $L : Z \to Y$ un opérateur borné.
On a $\Phi^{-1} \circ L : Z \to X$ et X est injectif donc il existe $\widetilde{\Phi^{-1} \circ L}$ tel que $\|\widetilde{\Phi^{-1} \circ L}\| = \|\Phi^{-1} \circ L\|$ et tel diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[d, "\widetilde{\Phi^{-1}\circ L}"] \\ Z \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "\phi^{-1}\circ L"'] & X \end{tikzcd}$$

On pose alors $\widetilde{L} = \Phi \circ \widetilde{\Phi^{-1} \circ L}$.
Il est alors évident que $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[d, "\widetilde{L}"] \\ Z \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "L"'] & Y \end{tikzcd}$$

(iii) Soit $p : X \to X$ une projection, et soit Z et Z' deux espaces de Banach et $\psi : Z \to Z'$ une isométrie, $L : Z \to p(X)$ un opérateur borné.
Puisque $p(X) \subseteq X$ il existe $\widetilde{L}$ de même norme que L qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[d, "\widetilde{L}"] \\ Z \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "L"'] & X \end{tikzcd}$$

En composant par p dans ce diagramme, et puisque $p \circ L = L$ on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[d, "p\circ\widetilde{L}"] \\ Z \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "L"'] & p(X) \end{tikzcd}$$

Donc $p \circ \widetilde{L}$ répond au problème posé car, puisque $\|p\| = 1$, $\|p \circ \widetilde{L}\| \leq \|L\|$. □

On peut maintenant répondre à la question 4 laissée en suspend dans le paragraphe 2.1 :

Théorème 2.5
Soit T un espace topologique Stonéen. Alors $C(T)$ ***est injectif****.*

Preuve.
On rappel que d'après la proposition 1.11 et le théorème 1.15, on a :

$$\textbf{T stonéen} \iff \textbf{T est le rétracte d'un espace libre}$$

Donc il existe S un espace discret, $r : \beta S \to T$ continue, $s : T \to \beta S$ homéomorphisme de T sur son image, tels que $r \circ s = Id_T$.
Soient alors les applications linéaires $\begin{array}{rccc} L_1 \colon & C(T) & \to & C(\beta S) \\ & f & \mapsto & f \circ r \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} L_2 \colon & C(\beta S) & \to & C(T) \\ & g & \mapsto & g \circ s \end{array}$
On note de suite que $\|L_1\| \leq 1$ et $\|L_2\| \leq 1$.
On a de plus :
- L_1 **est une isométrie** car :
  Si $t \in T$, $f(t) = (f \circ r)(s(t)) = L_1(f)(s(t))$ donc $\|f\|_\infty \leq \|L_1(f)\|_\infty$.
  L'inégalité inverse est évidente.
- L_2 **est surjective** comme le montre l'égalité $f = f \circ r \circ s = L_2(f \circ r)$.
- $p = L_1 \circ L_2$ **est une projection de norme 1 de** $C(\beta S)$ **sur** $Im(L_1)$ **:**
  $L_2 \circ L_1 = Id_{C(T)}$ donc $p^2 = p$ et $\|L_1 \circ L_2\| \leq 1$

Puisque $C(\beta S)$ est injectif (théorème 2.3), alors d'après la propriété 2.4 (iii), $p(C(\beta S)) = L_1 \circ L_2(C(\beta S)) = L_1(C(T))$ est injectif, puis par la propriété 2.4 (ii), puisque $\|L_1\|.\|L_1^{-1}\| = 1$, $C(T)$ **est injectif**. □

On peut maintenant se demander si la réciproque du théorème 2.5 est vraie.

La réponse est affirmative mais va demander plus de travail. Elle sera donnée au paragraphe **2.5** (théorème de Nachbin-Goodner-Kelley).
Passons tout d'abord à une notion équivalente à la propriété de λ-extension.

2.2 Propriété de λ-projection

Définition 2.6 (Propriété deλ-projection)
On dit qu'un espace de Banach X possède ***la propriété de λ-projection*** *($\lambda \geq 1$) si pour tout espace de Banach Y et pour tout isométrie $\Psi : X \to Y$, il existe une projection p de Y sur $\Psi(X)$ telle que $\|p\| \leq \lambda$.*

Nous avons alors le théorème (important) :

Théorème 2.7 *Soit X un espace de Banach.*

$$\boxed{X \textit{ est injectif} \iff X \textit{ a la propriété de 1-projection.}}$$

Preuve.
$\Rightarrow$: Soit $\Psi : X \to Y$ une isométrie. On note $i : X \to X$ l'identité. Puisque X est injectif il existe $\widetilde{i}$ telle que $\|\widetilde{i}\| = \|i\| = 1$ et que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\widetilde{i}"] \\ X \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

On voit facilement que $\Psi \circ \widetilde{i}$ est une projection de X sur $\Psi(X)$ et que $\|\Psi \circ \widetilde{i}\| \leq 1$.
Donc X a la propriété de 1-projection.

$\Leftarrow$: Soit $j : X \to \ell^\infty_K$ comme dans la propriété 2.4 (i).
Soit $\Psi : Y \to Z$ et $L : Y \to X$ un opérateur borné, où Y et Z sont des Banach.
Puisque X à la propriété de 1-projection et que j est une isométrie, il existe une projection p de ℓ^∞_K sur $j(X)$, de norme 1.
D'après la propriété 2.4(iii), $p(\ell^\infty_K) = j(X)$ est injectif, puis d'après la propriété 2.4(ii), X **est injectif** □

Avant de continuer notre caractérisation des espaces injectifs, nous avons besoin de nous arrêter sur la notion d'extensions **essentielles** et d'extension **rigides**.

2.3 Extensions essentielles et rigides

Définition 2.8
Soit X et Y deux espaces de Banach, $L : X \to Y$ une isométrie.
On dit que (Y, L) est :

- *Une **extension essentielle** de X, si pour tout Z espace de Banach, toute application linéaire $A : Y \to Z$ où $\|A\| \leq 1$, on a :*
  $$A \circ L \text{ est une isométrie} \Longrightarrow A \text{ est une isométrie.}$$
- *Une **extension rigide** de X, si pour tout Z espace de Banach, toute application linéaire $A : Y \to Y$ où $\|A\| \leq 1$, on a :*
  $$A \neq Id_Y \Longrightarrow A \circ L \neq L$$

Le but de la section suivante sera de construire une extension (Y, L) essentielle de X, telle que Y soit injectif.
Avant nous allons donner une propriété :

Propriété 2.9 *Soit une isométrie $L : X \to Y$, où X et Y sont deux Banach. On a l'implication suivante :*

$$(Y, L) \text{ extension essentielle de } X \Longrightarrow (Y, L) \text{ rigide}$$

Preuve.
On raisonne par l'absurde : supposons que (Y, L) est essentielle et non rigide.
Alors il existe $A : Y \to Y$, $\|A\| \leq 1$, tel que $A \neq Id_Y$ et $A \circ L = L$.
Soit alors y tel que $Ay \neq y$. On note $u = y - Ay$ et $M =$Vect(u). Soit $Z = \frac{Y}{M}$ et $\pi : Y \to Z$ la projection de Y sur Z.
Puisque M est fermé, on rappelle que Z, muni de la norme :

$$\|\pi(y)\| = \inf\{\|y + m\|, m \in M\}$$

est un espace de Banach. Alors :
(i) π n'est pas une isométrie : sinon on aurait $\forall m \in M \; \|\pi(m)\| = \|m\| = 0 = \|\pi(0)\|$, ce qui est impossible puisque $u \neq 0$.
(ii) $\pi \circ L$ est une isométrie.
Sinon il existerait $x \neq 0$ tel que $\|\pi \circ L(x)\| \neq \|x\|$. 0n peut supposer $\|x\| = 1$, donc $\|\pi \circ L(x)\| \neq 1$.
Or $\|L(x) + 0\| = \|x\| = 1$ donc on a même $\|\pi(L(x))\| < 1$.
Donc il existe $\delta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\|L(x) + \delta u\| < 1$. Or l'application $f : t \mapsto \|t + \delta u\| - \|t\|$ est continue et puisque $f(L(x)) < 0$, pour z assez proche de $L(x)$, $\|z + \delta u\| < \|z\|$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, on a $\boxed{\|z-\varepsilon u\| > \|z\|}$ **(1)**.
En effet :

$$\|z-\varepsilon u\| = \|(1+\frac{\varepsilon}{\delta})z-\frac{\varepsilon}{\delta}(z+\delta u)\| \geq (1+\frac{\varepsilon}{\delta})\|z\|-\frac{\varepsilon}{\delta}\|z+\delta u\| > (1+\frac{\varepsilon}{\delta})\|z\|-\frac{\varepsilon}{\delta}\|z\| = \|z\|$$

Or $A(Lx+\varepsilon y) = L(x)+\varepsilon A(y) = (L(x)+\varepsilon y)-\varepsilon u$ (car $A \circ L = L$).
Pour ε assez petit, $L(x)+\varepsilon y$ est assez proche de $L(x)$, et on peut appliquer **(1)** ce qui donne :
$\|A(Lx+\varepsilon y)\| > \|L(x)+\varepsilon y\|$.
Or $\|A\| \leq 1$: **contradiction.** □

2.4 Extensions bornées

On sait que pour deux Banach X et Y, tels que $X \subseteq Y$, on a pour $x \in X$, $\|x\| = \sup\{|\Lambda(x)|, \Lambda \in (Y^*)_1\}$.
Donc si F est une partie de $(Y^*)_1$, on a $\|x\| \geq \sup\{|\Lambda(x)|, \Lambda \in F\}$. Ceci mène aux définitions suivantes :

Définition 2.10 (X-frontière)
Soient X et Y deux espaces de Banach, tels que $X \subseteq Y$.
*On dit qu'une partie F de $(Y^*)_1$ est une X-**frontière** si pour tout $x \in X$,*

$$\|x\| = \sup\{|\Lambda(x)|, \Lambda \in F\}$$

Autrement dit, la partie F suffit à "décrire" la norme sur le sous espace X.

Définition 2.11 (Extension bornée)
*On dit que Y est une extension **bornée** de X si pour toute X-frontière F, on a pour tout $y \in Y$,*

$$\|y\| = \sup\{|\Lambda(y)|, \Lambda \in F\}$$

Dans la suite de ce paragraphe, X et Y désignent deux espaces de Banach tels que $X \subseteq Y$. On peut donner de suite une caractérisation des extensions bornées en terme de semi-normes :

Propriété 2.12
Y est une extension bornée de X si et seulement si toute semi-norme ρ sur Y vérifiant :

$$(*) \begin{cases} \forall x \in X, \rho(x) = \|x\| \\ \forall y \in Y, \rho(y) \leq \|y\| \end{cases}$$

est égale à la norme $\|.\|$ sur Y.

Preuve.

$\Leftarrow$: Soit X une $X-$frontière.
On pose $\rho(y) = \sup\{|\Lambda y|, \Lambda \in F\}$.
Alors ρ est clairement une semi-norme qui vérifie $(*)$.
Donc $\rho = \|.\|$ et $\boxed{Y \textbf{ est bornée}}$.

$\Rightarrow$: Soit F une extension bornée et ρ vérifiant $(*)$.

Posons $F = \{\Lambda \in (Y^*)_1 / \forall y \in Y, |\Lambda y| \leq \rho(y)\}$.

C'est une $X-$frontière :

On sait que pour tout $x \in X$, $\sup\{|\Lambda x|, \Lambda \in (Y^*)_1\} \leq \|x\|$, il suffit donc de montrer que ce sup est atteint.

On sait qu'il existe $\Lambda \in (X^*)_1$ telle que $|\Lambda x| = \|x\|$.

Puisque $\forall x \in X, |\Lambda x| \leq \|x\| = \rho(x)$, on peut prolonger, d'après le théorème de Hahn-Banach, Λ en une forme linéaire $\widetilde{\Lambda}$ sur Y^* qui vérifie $\forall y \in Y, |\widetilde{\Lambda} y| \leq \rho(y) \leq \|y\|$.

Donc $\widetilde{\Lambda} \in (Y^*)_1$ et $\widetilde{\Lambda}$ appartient bien à F.

Donc le sup est atteint et F est une $X-$frontière.

Par suite puisque Y est bornée, $\boxed{\rho(y) = \|y\|, \forall y \in Y}$ $\square$

Corollaire 2.13

Y est une extension bornée de X $\Leftrightarrow$ (Y, i) est une extension essentielle de X (où i est l'injection naturelle).

Preuve.

$\Rightarrow$: Soit Y une extension bornée de X, Z un Banach, $L : Y \to Z$ avec $\|L\| \leq 1$ telle que $L \circ i = L_{|X}$ soit une isométrie.

Soit ρ la semi-norme sur Y définie par $\rho(y) = \|Ly\|$.

Il est alors évident que ρ vérifie la condition $(*)$ de la propriété 2.12, donc $\rho = \|.\|$ et $\boxed{\textbf{L est une isométrie}}$.

$\Leftarrow$: Soit (Y, i) une extension essentielle et ρ vérifiant $(*)$.

On va montrer que $\rho = \|.\|$.

Soit $M = \ker \rho = \{y \in Y / \rho(y) = 0\}$.

ρ induit une norme $\widetilde{\rho}$ sur $\dfrac{Y}{M}$ définie par $\widetilde{\rho}(\pi(y)) = \inf\{\rho(y + z), z \in M\}$.

En effet si $y \in Y, z \in M$, on a $\rho(y + z) \geq |\rho(y) - \rho(z)| = \rho(y)$.

Donc $\rho(y) \geq \widetilde{\rho}(\pi(y)) \geq \rho(y)$ et $\boxed{\widetilde{\rho}(\pi(y)) = \rho(y)}$.

On considère alors π comme une application linéaire à valeur dans le complété de $\dfrac{Y}{M}$ muni de la norme induite par $\widetilde{\rho}$. Puisque $\rho(y) \leq \|y\|, \forall y \in Y$, π est donc une contraction.

De plus $\pi \circ i = \pi_{|X}$ est une isométrie car si $x \in X$, $\widetilde{\rho}(\pi(x)) = \rho(x) = \|x\|$.

Puisque Y est essentielle, π est alors une isométrie, soit $\boxed{\rho(y) = \|y\|, \forall y \in Y}$

$\square$

Dans la **propriété 2.4(i)**, on a vu que tout espace de Banach X admettait une extension Y injective . Le théorème suivant montre que Y peut être choisi de plus comme une extension bornée :

Théorème 2.14

Soient X et Y espaces de Banach tels que $X \subset Y$, où Y est injectif.

Alors il existe Z injectif tel que $X \subset Z \subset Y$ et Z est une extension bornée de X.

Preuve.

Soit $\mathcal{F} = \{\rho \text{ semi-normes vérifiant } (*)\}$.
Alors $\mathcal{F}$ est partiellement ordonné par $p \leq q$ si $p(y) \leq q(y)$, $\forall y \in Y$.
On va montrer que $\mathcal{F}$ admet un élément minimal : Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de semi-norme de $\mathcal{F}$.
Si $y \in Y$, $\{\rho_i(y), i \in I\}$ est un ensemble non vide minorée de $\mathbb{R}$. Soit $\rho(y)$ sa borne inférieure.
Il suffit de montrer que ρ est une semi-norme. Seule l'inégalité triangulaire pose problème :
Soient x_1, x_2 dans X et $\epsilon > 0$. Il existe ρ_1, ρ_2 dans la famille totalement ordonnée telle que :
$\rho_1(x_1) \leq \epsilon + \rho(x_1)$ et $\rho_2(x_2) \leq \epsilon + \rho(x_2)$.
A cause de l'ordre totale, on a par exemple $\rho_1 \leq \rho_2$ et alors en posant $m = \rho_1$ on a une semi-norme m dans la famille verifiant a la fois $m \leq \rho_1$ et $m \leq \rho_2$. Alors

$$\rho(x_1 + x_2) \leq m(x_1 + x_2) \leq m(x_1) + m(x_2) \leq \rho_1(x_1) + \rho_2(x_2)$$

donc :$\rho(x_1 + x_2) \leq \rho(x_1) + \rho(x_2) + 2\epsilon$.
Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, donc $\rho(x_1 + x_2) \leq \rho(x_1) + \rho(x_2)$.
Il est aussi évident que $\rho \in \mathcal{F}$.
Donc par le lemme de Zorn, $\boxed{\mathcal{F} \text{ admet un plus petit élément } \rho_0}$.
Puisqu'on a vu dans dans le corollaire 2.13 que si ρ_0 vérifie $(*)$ alors la restriction à X de $\pi : Y \to Z$ est une isométrie (où Z désigne la complétion de $\frac{Y}{M}$ munie de la norme induite par ρ_0).
Alors puisque $\pi_{|X}^{-1} : \pi(X) \to X \subseteq Y$, et puisque Y est injectif, il existe $\widetilde{\pi_{|X}^{-1}}$ de norme égale à 1 et qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "\widetilde{\pi_{|X}^{-1}}"] \\
\pi(X) \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[r, "\pi_{|X}^{-1}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

On pose alors $L = \widetilde{\pi_{|X}^{-1}} \circ \pi$. L vérifie :
- Si $x \in X$, $Lx = x$
- Si $y \in Y$, $\|Ly\| \leq \|\widetilde{\pi_{|X}^{-1}}\|.\widetilde{\rho_0}(\pi(y)) = \rho_0(y)$.

On définit alors la semi-norme ρ_1 par $\rho_1(y) = \|Ly\|$.
D'après ce qui précède, $\rho_1 \leq \rho_0$ et par minimalité, $\rho_1 = \rho_0$.
Soit alors ρ_2 définie par $\rho_2(y) = \limsup_n \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L^i(y)\|$.
ρ_2 est une semi-norme(la limite sup de la somme est inférieure à la somme des limites sup) et si $x \in X$, pour tout i, $L^i(x) = x$, donc $\rho_2(x) = x$.
De plus si $y \in Y$, par récurrence, $\|L^i(y)\| \leq \rho_0(L^{i-1}) \leq \|L^{i-1}(y)\| \leq \|y\|$, donc $\rho_2(y) \leq \|y\|$.
Donc $\rho_2 \in \mathcal{F}$ et puisque $\rho_2 \leq \rho_0$, $\boxed{\rho_2 = \rho_0}$.
Or $\rho_2(y - Ly) = \limsup_n \underbrace{\|\frac{1}{n}(L(y) - L^{n+1}(y))\|}_{\leq \frac{2}{n}\|y\|} = 0$.
Donc $\rho_0(y - Ly) = 0 = \rho_1(y - Ly) = \|Ly - L^2y\|$.
On en déduit que $L = L^2$, donc L est une projection contractante et $\boxed{X \subseteq L(Y) := Z}$.

Alors d'après le théorème 2.4(iii), $\boxed{Z \textbf{ est injectif}}$.

Il nous reste à montrer que Z est une extension bornée de X.
Soit alors une semi-norme ρ de Z vérifiant : $\begin{cases} \forall x \in X, \rho(x) = \|x\| \\ \forall z \in Z, \rho(z) \leq \|z\| \end{cases}$
Alors clairement $\rho \circ L \in \mathcal{F}$ et pour tout $y \in Y$, $\rho(Ly) \leq \|Ly\| = \rho_1(y) = \rho_0(y)$ et donc $\rho \circ L = \rho_0$ par minimalité.
Donc si $z = Ly \in Z$, $\|z\| = \|Ly\| = \rho_1(y) = \rho_0(y) = \rho \circ L(y) = \rho(z)$. CQFD
Donc $\boxed{Z \textbf{ est bornée}}$ □

2.5 Théorème de Nachbin-Goodner-Kelley

On a besoin de deux lemmes avant de démontrer le théorème, réciproque du théorème 2.5.

Lemme 2.15 *Si $X \subseteq Y$ sont deux Banach, il existe une $X-$frontière w-$*$ fermée, minimale*

Preuve.
On applique le lemme de Zorn :
L'ensemble des $X-$frontières w-$*$ fermées est ordonnée et non vide (il contient bien évidemment $(Y^*)_1$).
Soit $\mathcal{F}$ une famille bien ordonnée de cet ensemble et soit G l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{F}$.
G est w-$*$ fermé et il reste à démontrer que c'est une $X-$frontière, soit que pour tout $x \in X$, $\|x\| = \sup\{|\Lambda(x)|, \Lambda \in G\}$.
Puisque G est une intersection de $X-$frontières, si $\Lambda \in G$, $|\Lambda(x)| \leq \|x\|$.
Montrons alors que $\forall \varepsilon > 0, \exists \Lambda \in G / \|x\| - \varepsilon \leq |\Lambda(x)|$.
Posons pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\Omega_F = \{\Lambda \in F / \|x\| - \varepsilon \leq |\Lambda(x)|\}$
Par hypothèse chaque Ω_F est non vide, et puisque $\mathcal{G}$ est bien ordonnée, toute intersection finie de Ω_F, $F \in \mathcal{F}$ est non vide.
Or Ω_F est clairement w-$*$ fermé, et puisque $(Y^*)_1$ est w-$*$ compact, $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \neq \emptyset$, ce qui achève la preuve. □

Avant d'énoncer le second lemme, notons le fait suivant :
Si T est un espace topologique et $F \subseteq T$, F peut se voir comme une partie de $C(T)^*$, qui est l'ensemble des mesures de Radon sur T, grâce à l'injection $j\colon \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & C(T)^* \\ t & \mapsto & \delta_t \end{array}$

Alors :

$$\begin{array}{lcl} F \text{ est une } X-\text{frontière} & \Leftrightarrow & \forall f \in X, \|f\| = \sup\{|\int f\, \delta_t|, t \in F\} \\ & \Leftrightarrow & \forall f \in X, \|f\| = \sup\{|f(t)|, t \in F\} := \|f\|_F \\ & \Leftrightarrow & \forall f \in X, \|f\| = \|f\|_F \end{array}$$

Donc F n'est pas une $X-$frontière ssi il existe $f \in X, \|f\|_F < \|f\|$

Dans toute la suite on considère que T et X vérifient la condition $(\mathcal{C})$ si :
$(\mathcal{C})$: T un compact et X un sous-espace fermé de $C(T)$, tel que pour tout F fermé et $F \subsetneq T$, F n'est pas une $X-$frontière.

Lemme 2.16 *Soit T vérifiant $(\mathcal{C})$ et $f \in C(T)$, et $0 \leq d < \|f\|$.*
Alors $\exists\, g \in X / \|g + f\| < \|g\| - d$

Preuve.
Elle est non triviale et technique. Je renvoie le lecteur intéressé à **[1]** page 91.

Théorème 2.17 *Soit T et X vérifiant $(\mathcal{C})$.*
Alors $(C(T), i)$ est une extension essentielle de X

Preuve.
D'après le corollaire **2.13**, il suffit de démontrer que $(C(T), i)$ est une extension bornée de X.
Soit alors ρ une semi-norme telle que $\rho \leq \|.\|$ et $\rho(x) = \|x\|$ pour $x \in X$.
Si $f \in C(T)$, et si $g \in X$ alors,

$$\|f + g\| \geq \rho(f + g) \geq \rho(f) - \rho(g) = \|g\| - \rho(f)$$

Alors d'après le lemme précédent, $\rho(f) \geq \|f\|$ soit $\boxed{\rho = \|.\|}$. □

On est maintenant près à énoncer le :

Théorème 2.18 (Nachbin-Goodner-Kelley)
Soit X injectif. Alors X est isométrique à un $C(T)$ où T est un compact stonéen.

Soit $T \subseteq (X^*)_1$ une $X-$frontière (relative à X lui-même) w-$*$ fermée, minimale (lemme **2.15**). T est donc compact et pour $x \in X$, $\|x\| = \sup\{|x^*(x)|, x^* \in T\}$.
Soit :

$$\begin{array}{rcl} L\colon X & \rightarrow & C(T) \\ x & \mapsto & \begin{array}{rcl} L(x)\colon T & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x^* & \mapsto & x^*(x) \end{array} \end{array}$$

C'est clairement une isométrie.
Puisque T est minimale et compact, T et $L(X)$ vérifient la condition $(\mathcal{C})$.
Donc $(C(T), i)$ est une extension essentielle de $L(X)$.
Il est alors aisée de voir (une simple reprise de la définition), que $(C(T), L)$ est une extension essentielle de X.
Or puisque X est injectif et possède la propriété de 1-projection, il existe une projection contractante p de $C(T)$ sur $L(X)$.
Alors puisque l'extension $(C(T), L)$ est essentielle donc rigide,

$$p \circ L = L \Longrightarrow p = Id_{C(T)}$$

Donc L est surjective et $\boxed{X \textbf{ est isométrique à } C(T)}$.
Ceci montre au passage que $C(T)$ est injectif.

Reste à montrer que T est stonéen :
D'après les théorèmes **1.13** et **1.15**, T est l'image continue d'un espace stonéen Ω par une application $h : \Omega \rightarrow T$ minimale.
Soit alors l'opérateur $\begin{array}{rcl} A\colon C(T) & \rightarrow & C(\Omega) \\ f & \mapsto & f \circ h \end{array}$.
Puisque h est surjective, c'est une isométrie.
De plus Ω et $X = A(C(T)) \subseteq C(\Omega)$ vérifient la condition $(\mathcal{C})$, car :

Si F est fermé tel que $F \subsetneq \Omega$ alors $h(F) \subsetneq T$ (car h est minimale).
Donc $h(F)$ n'est pas une $C(T)$-frontière. Donc il existe $f \in C(T)$ telle que

$$\|f\| > \sup\{|f(t)|, t \in h(F)\}$$

Or $\|A(f)\| = \|f\|$, donc en posant $g = A(f)$, on obtient qu'il existe $g \in A(C(T))$ telle que $\|g\| > \sup\{|g(z)|, z \in F\}$, donc F **n'est pas une $A(C(T))$-frontière**.

On peut donc appliquer le théorème **2.17** : $(C(\Omega), i)$ est une extension essentielle de $A(C(T))$ donc $(C(\Omega), A)$ est une extension essentielle de $C(T)$.
On faisant le même raisonnement que pour X, puisque $C(T)$ est injectif, A est surjectif.

Alors h est injective :
Si $a, b \in \Omega$ sont tels que $h(a) = h(b)$, alors en composant par f, on obtient :
$\forall f \in C(T), A(f)(a) = A(f)(b)$, et donc $\forall g \in C(\Omega)$, $g(a) = g(b)$.

Le lemme d'Urysohn implique alors que $\boxed{a = b}$.

h est donc une bijection continue sur un espace compact : c'est un homéomorphisme et $\boxed{T \textbf{ est stonéen}}$. □

Notons que ce théorème n'est pas en contradiction avec les exemples donnés dans la partie **2.1**.
En effet le théorème de Gelfand, une C^*-algèbre A est de la forme $C(Sp(A))$ où $Sp(A)$ est l'ensemble compact (pour la topologie w-$*$) des homomorphismes non nuls de A dans $\mathbb{C}$.
Par exemple $Sp(\mathbb{C}) = \{Id\}$ qui est bien stonéen.

Chapitre 3

Espaces d'opérateurs injectifs

Avant de rentrer dans le vif du sujet, rappelons quelques définitions supposées connues :

- Un **espace d'opérateurs** X est un sous-espace vectoriel fermé d'une C*-algèbre (que l'on peut supposer unitale).
- Un **système d'opérateurs** est un espace d'opérateur qui contient l'unité et auto-adjoint.
- Si X est un espace d'opérateurs , A une C*-algèbre , $u : X \to A$ un opérateur borné, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\begin{array}{rccc} u_n\colon & M_n(X) & \to & M_n(A) \\ & [x_{ij}] & \mapsto & [u(x_{ij})] \end{array}$ définit une application linéaire bornée et $\|u_n\|$ est croissante.

  Si $\sup_n\{\|u_n\|\} < \infty$ alors on dit que u est **complètement bornée** et on note
  $$\|u_n\|_{cb} = \sup_n\{\|u_n\|\}$$
- On dit que u est **complètement contractante** si $\|u\|_{cb} \leq 1$ et **complètement isométrique** si chaque u_n est une isométrie.
- Si S est un système ou une C*-algèbre , A une C*-algèbre alors $u : S \to A$ est **positive** si $u(x^*x) \geq 0$ pour tout $x \in S$.

  u est dite **complètement positive** si chaque u_n est positive.

Nous emploierons sans démonstrations des propriétés de base liés à ces notions. Pour plus de détail on pourra se reporter à [2] et [8].

3.1 Premières définitions et propriétés

Définition 3.1 (Injectivité)
Un espace d'opérateurs (à fortiori une C-algèbre) Z, est dit* ***injectif****, si pour tout espaces d'opérateurs X et Y, pour toute isométrie complète $\Psi : X \to Y$ et pour toute application linéaire complètement bornée $u : X \to Z$, il existe $\widetilde{u} : Y \to Z$ tel que $\|\widetilde{u}\|_{cb} = \|u\|_{cb}$ et tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\widetilde{L}"] \\ X \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "L"'] & Z \end{tikzcd}$$

Pour alléger les notations, on confondra à partir de maintenant X et $\Psi(X)$ pour toute isométrie complète Ψ, et ainsi les espaces d'opérateurs X et Y de la définition seront pris avec $X \subseteq Y$.

Comme présenté en introduction, notons que cette notion d'injectivité est celle d'injectivité dans la catégorie **des espaces d'opérateurs**, où les morphismes sont **les applications complètement contractantes**.

Nous pouvons aussi considérer la catégorie σ des **systèmes d'opérateurs** où les morphismes sont **les applications linéaires complètement positives** (la composée de deux applications linéaires complètement positives est complètement positive).

Nous allons voir que pour un système d'opérateurs, l'injectivité dans ces deux catégories sont équivalentes.

Avant citons un résultat très important :

Théorème 3.2 (d'extension de Wittstock)
Pour tout Hilbert H***,*** $B(H)$ ***est injectif***.

Ce résultat, admis, est extrêmement fort car il donne une classe très large de C*-algèbre injectives, et montre que tout espace d'opérateurs peut être vue comme un sous-espace d'une C*-algèbre injective.
On en trouvera une preuve dans **[2]** ou **[8]**.
La propriété suivante donne alors une caractérisation de l'injectivité d'un système d'opérateurs .

Propriété 3.3 *Soit* $S \subseteq B(H)$ *un* ***système d'opérateurs****. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) S *est injectif*
(ii) S *est injectif dans la catégorie* σ
(iii) Il existe une projection complètement positive $\phi : B(H) \to S$
(iv) Il existe une projection complètement contractante $\phi : B(H) \to S$

Preuve.
Nous allons montrer que $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: L'application identité $Id : S \to S$ est complètement bornée , donc il existe un prolongement $\widetilde{Id} : B(H) \to S$ telle que $\|\widetilde{Id}\|_{cb} = 1$.
Cette application est une projection et puisque $1 \in S$, $\widetilde{Id}(1) = 1$ donc $\widetilde{Id}$ est complètement positive (cf propriété 1.15 [8]).

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Soient $X \subseteq Y \subseteq B(K)$ deux **systèmes** d'opérateurs et $\psi : X \to S$ complètement positive.
Alors d'après le théorème d'**Arverson** (théorème 4.10 de [8]), il existe $\Psi : B(K) \to B(H)$ complètement positive qui prolonge ψ.
On pose alors $\widetilde{\psi} = \phi \circ \Psi_{|Y}$ qui est le prolongement complètement positif de ψ à Y recherché.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: La preuve est similaire à $(i) \Rightarrow (iii)$ en notant le fait que (complètement positive) $\Rightarrow$ (complètement bornée) et $\|u\|_{cb} = \|u(1)\|$ pour une application u d'un système d'opérateurs à valeur dans une C*-algèbre .

$(iv) \Rightarrow (i)$: On procède exactement comme dans $(iii) \Rightarrow (ii)$ en se servant cette fois du fait que $B(H)$ est injectif □

Notons que la caractérisation (iv) **subsiste pour un espace d'opérateurs**
Donnons maintenant quelques exemples d'espaces d'opérateurs injectifs :

- **Toute C*-algèbre A de dimension finie est injective** :
  Il est bien connu (voir par exemple **[9]**, théorème 11.2) qu'une telle C*-algèbre est de la forme $\bigoplus_{k=1}^{N} M_{n_k}$ où $M_{n_k} \simeq B(\ell^2_{n_k})$ est injectif.
  Il suffit donc de montrer qu'une telle somme directe A de C*-algèbre injective $A = \bigoplus_{k=1}^{N} A_k$ est injective.
  La norme sur A est donnée par $\|(a_1, a_2, ..., a_N)\| = \max_k \|a_k\| (*)$.
  Soit alors $X \subseteq Y$ deux espace d'opérateurs et $u : X \to A$ complètement bornée.
  Notons pour $k \in <1, N>$, $u_k : X \to A_k$, la $k-$ième composante de u.
  On a : $\boxed{\|u\|_{cb} = \max_k \|u_k\|_{cb}}$. En effet on a pour tout n, $M_n(A) = \bigoplus_{k=1}^{N} M_n(A_k)$, ainsi la formule $(*)$ est valable pour tout $a_k \in M_n(A_k)$.
  Donc pour $x \in M_n(X)$, $\|u_n(x)\| = \max_k \|(u_k)_n(x)\|$, donc en passant à la borne supérieure sur n dans cette égalité et en permutant les symboles sup et max on obtient que :
  $$\sup_n \|u_n(x)\| = \max_k \sup_n \|(u_k)_n(x)\| \leq \max_k \|u_k\|_{cb} \|x\|$$
  Donc $\|u\|_{cb} \leq \max_k \|u_k\|_{cb}$ et on a l'égalité.
  Puisque A_k est injectif et que $\|u_k\|_{cb} \leq \|u\|_{cb}$, il existe $\widetilde{u_k} : Y \to A_k$ qui étend u_k et telle que $\|\widetilde{u_k}\|_{cb} = \|u_k\|_{cb}$.
  On pose alors $\widetilde{u} = (\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, ..., \widetilde{u_N})$ qui étend u et telle que
  $$\|\widetilde{u}\|_{cb} = \max_k \|\widetilde{u_k}\|_{cb} = \max_k \|u_k\|_{cb} = \|u\|_{cb}$$
  Ainsi A est **injectif**.

- **Soit A une C*-algèbre commutative. A quelle condition est-elle injective ?**.
  $A \simeq C(K)$ où K est compact ou bien $A \simeq C_0(L)$ où L est localement compact.
  Or (**[8]** propriété 2.12), si X est un espace d'opérateurs , et $u : X \to A$ une application linéaire : u complètement bornée $\Leftrightarrow u$ bornée.
  Donc :

A injectif en tant qu'espace d'opérateur	$\Leftrightarrow$	A injectif en tant qu'espace de Banach
	$\Leftrightarrow$	$\boxed{A \simeq C(K)}$ **où K est compact stonéen**

Cependant, notons qu'il n'existe pas de caractérisation des C*-algèbre injectives en général.
Donnons un dernier exemple utile pour la suite :

- **Soit** $A \subseteq B(H)$ **une C*-algèbre injective et** p, q **deux projections de A. Alors** pAq **est un espace d'opérateurs injectif** :
  On sait (propriété **3.3**), qu'il existe une projection contractante $\phi : B(H) \to A$ complètement bornée . Alors $p\phi q$ est une projection sur pAq et $\|p\phi q\|_{cb} \leq \|p\|.\|\phi\|_{cb}.\|q\| = \|\phi\|_{cb} \leq 1$, ce qui implique que pAq est injectif (propriété **3.3**).

On va montrer en fait que tout espace d'opérateurs injectif est (dans un sens à préciser) de cette forme.

3.2 Théorème de Choi-Effros

Avant d'aller plus loin, donnons un résultat qui montre que tout système d'opérateur injectif peut être muni d'une loi multiplicative qui en "fait" une C*-algèbre .

Théorème 3.4 (Choi-Effros)
Soit $S \subseteq B(H)$ un espace d'opérateurs injectif et $\phi : B(H) \to S$ une projection contractante complètement positive . Alors la loi $\star$ définie sur S par $a \star b = \phi(a.b)$ est une multiplication sur S, qui fait de S (munie de la même involution , et de la même norme) une C-algèbre que l'on note $(S, \star)$.*
De plus $Id : S \to (S, \star)$ est un isomorphisme complètement isométrique.

Commençons la preuve par deux lemmes :

Lemme 3.5 *Soit A une C*-algèbre unitale et $a, b \in A$. Alors :*

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow a^*a \leq b$$

Preuve.
On peut supposer que $A \subseteq B(H)$, ce qui ne modifie pas la preuve.
Si $x, y \in H$, on a $\Delta(x,y) := \left\langle \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle ay, x\rangle) + \langle by, y\rangle$
On voit de suite qu'il est nécessaire d'avoir $b \geq 0$ (en prenant $x = 0$).
Montrons que l'on a $\boxed{\Delta(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x, y \in H, |\langle ay, x\rangle| \leq \|x\|\sqrt{\langle by, y\rangle}}$
En effet la condition est suffisante car dans ce cas

$$\Delta(x,y) \geq \|x\|^2 - 2\|x\|\sqrt{\langle by, y\rangle} + \langle by, y\rangle = (\|x\| - \langle by, y\rangle)^2 \geq 0$$

La condition est nécessaire car si il existe x, y tels que $|\langle ay, x\rangle| > \|x\|\sqrt{\langle by, y\rangle}$, alors quitte à diviser par $\|x\|$ et $\sqrt{\langle by, y\rangle}$, on peut supposer $\|x\| = \sqrt{\langle by, y\rangle} = 1$ et quitte à changer x en $-x$, on a $\langle ay, x\rangle < -1$ (et on peut supposer que cette quantité est dans $\mathbb{R}$ en changeant x en $xe^{i\varphi}$ pour φ convenable).
Alors $\Delta(x,y) = 2 + 2Re(\langle ay, x\rangle) < 2 - 2 = 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\Delta(x,y) \geq 0, \forall x,y \in H &\iff \forall x,y \in H |\left\langle ay,x \right\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \left\langle by,y \right\rangle \\
&\iff \forall x,y \in H, \|x\| = 1, |\left\langle ay,x \right\rangle|^2 \leq \left\langle by,y \right\rangle \\
&\iff \forall y \in H, \sup\{|\left\langle ay,x \right\rangle|^2, \|x\| = 1\} \leq \left\langle by,y \right\rangle \\
&\iff \forall y \in H, \|ay\|^2 \leq \left\langle by,y \right\rangle \\
&\iff \forall y \in H, \left\langle a^*ay,y \right\rangle \leq \left\langle by,y \right\rangle \\
&\iff a^*a \leq b \ \square
\end{aligned}$$

Lemme 3.6 (Inégalité de Schwartz) *Soit $u : A \to B(H)$ où A est une C^*-algèbre unitale.*
Si u est complètement positive et unitale alors :

$$\forall a \in A, u(a)^*u(a) \leq u(a^*a)$$

Preuve.
On a $\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & a\\a^* & aa^*\end{bmatrix} \geq 0$ et donc $u_2\left(\begin{bmatrix}1 & a\\a^* & aa^*\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & u(a)\\u(a^*) & u(aa^*)\end{bmatrix} \geq 0$

Le lemme 3.5 donne alors le résultat escompté.

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème de Choi-Effros :

- La distributivité de $\star$ est clair et $1 \star a = a \star 1 = a$. On a aussi facilement $(a \star b)^* = b^* \star a^*$, puisque ϕ est auto-adjointe (fait que l'on utilisera sans plus de commentaire).
Le point le plus difficile est l'associativité soit $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, ou encore $\phi(a.\phi(bc)) = \phi(\phi(ab).c)$. Pour ce faire on a va montrer que :

$$\forall x \in B(H), a \in S,\ \phi(\phi(x).a) = \phi(x.a) \text{ et } \phi(a.\phi(x)) = \phi(a.x)$$

Appliquons pour cela l'inégalité de Schwartz à l'application complètement positive $u = \phi_2$ et $y = \begin{bmatrix}a^* & x\\0 & 0\end{bmatrix}$ (en notant au passage que $\phi(x)^* = \phi(x^*)$ car u est auto-adjointe et que $\phi(a) = a$) :

$$\begin{bmatrix}\phi(aa^*) & \phi(ax)\\ \phi(x^*a^*) & \phi(x^*x)\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}\phi(a)\phi(a^*) & \phi(a)\phi(x)\\ \phi(x^*)\phi(a^*) & \phi(x^*)\phi(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aa^* & a\phi(x)\\ \phi(x^*)a^* & \phi(x^*)\phi(x)\end{bmatrix}$$

On applique encore ϕ_2 à cette inégalité pour obtenir :

$$\begin{bmatrix}0 & \phi(ax) - \phi(a\phi(x))\\ \phi(ax)^* - \phi(a\phi(x))^* & \phi(x^*x) - \phi(\phi(x)^*\phi(x))\end{bmatrix} \geq 0$$

Or ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\varepsilon}(\phi(ax) - \phi(a\phi(x)))\\ \frac{1}{\varepsilon}(\phi(ax)^* - \phi(a\phi(x))^*) & \frac{1}{\varepsilon}(\phi(x^*x) - \phi(\phi(x)^*\phi(x)))\end{bmatrix} \geq 0$$

En appliquant le lemme 3.5, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{\varepsilon^2}(\phi(ax) - \phi(a\phi(x)))(\phi(ax)^* - \phi(a\phi(x))^*) \leq \frac{1}{\varepsilon}(\phi(x^*x) - \phi(\phi(x)^*\phi(x)))$$

En faisant tendre ε vers 0 et en passant à la norme, on obtient :

$$\boxed{\forall a \in S, x \in B(H), \phi(ax) - \phi(a\phi(x)) = 0}$$

Puisque S est un système, on obtient aussi :

$$\boxed{\forall a \in S, x \in B(H), \phi(xa) - \phi(\phi(x)a) = 0}$$

On a alors

$$\boxed{\phi(a.\phi(bc)) = \phi(abc) = \phi(\phi(ab).c)}$$

, ce qui démontre l'associativité.

- Vérifions maintenant la norme sur S est une norme de C*-algèbre sur $(S, \star)$.
Il est déja clair que $\|a \star b\| = \|\phi(ab)\| \leq \underbrace{\|\phi\|}_{=1} \|a\|\|b\|$

On a de plus égalité lorsque $b = a^*$:
L'inégalité de Schwartz donne $\phi(a^*a) \geq \phi(a)^*\phi(a) = a^*a$ et donc puisque $\phi(a^*a)$ et a^*a sont positif, $\|\phi(a^*a)\| \geq \|a^*a\| = \|a\|^2$, ce qui achève de montrer que $(S, \star)$ est une C*-algèbre .

- Enfin, $Id : S \rightarrow (S, \star)$ est clairement une isométrie. Démontrons alors qu'elle est complètement isométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Id_n : M_n(S) \rightarrow (M_n(S, \star))$ où la loi est à préciser : Si $[a_{i,j}]$ et $[b_{i,j}]$ sont deux éléments de $(M_n(S, \star))$, alors on a, en notant $[a_{i,j}] \star_n [b_{i,j}]$ leur produit :

$$[a_{i,j}] \star_n [b_{i,j}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \star b_{k,j}] = [\sum_{k=1}^{n} \phi(a_{i,k}b_{k,j})] = [\phi(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})] = \phi_n([a_{i,j}][b_{i,j}])$$

où $\phi_n : M_n(B(H)) = B(\ell^2_n(H)) \rightarrow M_n(S)$.

Il est immédiat que ϕ_n est une projection contractante complètement positive, on peut appliquer le point précédent : $(M_n(S), \circ_n)$ est une C*-algèbre où la loi $\circ_n$ est définie par $[a_{i,j}] \circ_n [b_{i,j}] = \phi_n([a_{i,j}][b_{i,j}]) = [a_{i,j}] \star_n [b_{i,j}]$.
Donc les lois $\circ_n$ et $\star_n$ sont égales et $M_n(S, \star) = (M_n(S), \circ_n)$.
Or on sait que $M_n(S, \star)$ peut être muni d'une norme qui en fait une C*-algèbre (c'est la norme induite par $B(\ell^2_n(H))$), et on sait que cette norme est unique (cf[8] p 12).
Cette norme coïncide donc avec celle sur $(M_n(S), \circ_n)$, donc celle sur $M_n(S)$ puisque c'est la même par construction. Ainsi ϕ_n est une isométrie □

Ce théorème montre donc que tout système d'opérateurs injectif est complètement isométrique à une C*-algèbre injective.
On peut se demander si le résultat subsiste pour les **espaces** d'opérateurs injectifs ? La réponse est non : On trouvera un contre-exemple dans [3], théorème 4.3.

Nous allons maintenant parler de la notion d'enveloppe injective.

3.3 Enveloppes injectives

Définition 3.7
Soit F un espace d'opérateurs . On dit que (E, L) est une enveloppe injective de F si :

- *E est injectif*
- *$L : F \to E$ est complètement isométrique*
- *E est **minimal** pour cette propriété :*
  Si E_1 est injectif et $L(F) \subseteq E_1 \subseteq E$, alors $E_1 = E$.

Comme d'habitude, on regardera F comme un sous espace de E et L sera l'injection naturelle.
Pour prouver l'existence de l'enveloppe injective on pourrait être tenté d'utiliser le lemme de Zorn, mais il n'est pas clair qu'une intersection décroissante d'espaces injectifs est encore injective.
Il faut donc introduire de nouveaux outils :

Définition 3.8
Soit $\varphi : B(H) \to B(H)$, une application linéaire et $F \subseteq B(H)$.
*On dit que φ est une **F-application** si φ est complètement contractante et si $\varphi_{|F} = Id_F$ (donc $F \subseteq \varphi(B(H))$).*
*Si φ est de plus une projection, on dit que φ est une **F-projection**.*
*Étant donné une F-application φ, on définit une **F-seminorme** ρ_φ en posant $\rho_\varphi(x) = \|\varphi(x)\|$*

On définie ainsi un ordre partiel sur les $F-$projections par :
$\psi \prec \varphi$ si $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \psi$, ce qui est équivalent à $im(\psi) \subseteq im(\varphi)$ et $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$.
L'ordre partiel sur les F-seminormes est l'ordre déja évoqué au chapitre 2. Aussi, comme au chapitre 2, l'introduction de ces semi-normes, va permettre d'arriver au résultat.

Propriété 3.9 *Soit $F \subseteq B(H)$ un espace d'opérateurs . Alors il existe une F-seminorme minimale sur $B(H)$.*

On trouvera dans **[2]**, chapitre 7, et dans les points 4.6, 4.7, 4.8 de **[8]** tous les éléments concernant la topologie BW sur $B(X, B(H))$ où X est un Banach.
Preuve.
Soit $(\rho_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée de F-seminormes associées aux F-applications $\varphi_i : B(H) \to B(H)$.
$(\varphi_i)_i$ est une suite (généralisée) de la boule unité de $B(B(H), B(H))$, qui muni de la BW-topologie, est compact (théorème de Banach-Alaoglu).
Il existe donc une sous-suite $(\varphi_{i_t})_t$ qui converge BW vers φ avec $\|\varphi\| \le 1$.
Clairement, la caractérisation de la BW-convergence pour les suites bornées montre que φ est une F-application et que $\varphi_{|F} = Id_F$.
Montrons que $\|\varphi\|_{cb} \le 1$:
Soit $[x_{i,j}] \in M_n(B(H)) = B(H \oplus H ... \oplus H)$ et $h, k \in H \oplus H ... \oplus H$.
Alors $\langle [\varphi(x_{i,j})]h, k\rangle = \lim_t \langle [\varphi_{i_t}(x_{i,j})]h, k\rangle$
En passant à la norme dans cette égalité on obtient que $\|[\varphi(x_{i,j})]\| \le \|[x_{i,j}]\|$ pour tout n et donc $\boxed{\|\varphi\|_{cb} \le 1}$.
De plus ρ_φ est minimale car :
$|\langle \varphi(x)h, k\rangle| = \lim_t |\langle \varphi_{i_t}(x)h, k\rangle| = \liminf_t |\langle \varphi_{i_t}(x)h, k\rangle| \le \liminf_t \|\varphi_{i_t}(x)\|.\|h\|.\|k\|$

pour tout $x \in X$ et $h, k \in H$.

Donc $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi_{i_t}(x)\|$ et donc $\rho_\varphi \leq \rho_{i_t}$ pour tout t.
Puisque pour tout i il existe t tel que $\rho_i \leq \rho_{i_t}$ on obtient que $\rho_\varphi \leq \rho_i$ pour tout i.

Théorème 3.10
*Si $\varphi : B(H) \to B(H)$ est une F-application telle que ρ_φ soit une F-seminorme **minimale**, alors φ est une F-projection minimale et $\varphi(B(H))$ est une **enveloppe injective** de F.*

Preuve.
On commence par prouver que φ est une F-projection :
Puisque φ est une F-application et que $\|\varphi \circ \varphi(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$ alors par minimalité de ρ_φ, on a $\|\varphi \circ \varphi(x)\| = \|\varphi(x)\|$ pour tout x de $B(H)$.
Alors pour tout k, $\|\varphi^{(k)}(x)\| = \|\varphi(x)\|$ où $\varphi^{(k)}$ désigne l'itérée k-ième de φ.
Posons $\psi_n(x) = \dfrac{\varphi(x) + \varphi^{(2)}(x) + ...\varphi^{(n)}(x)}{n}$.
ψ_n est une F-application qui vérifie $\|\psi_n(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$, donc par minimalité $\|\psi_n(x)\| = \|\varphi(x)\|$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\|\varphi \circ \varphi(x) - \varphi(x)\| = \|\varphi(x - \varphi(x))\| = \|\psi_n(x - \varphi(x))\| &= \|\frac{\varphi(x) - \varphi^{(n+1)}(x)}{n}\| \\ &\leq 2\frac{\|\varphi(x)\|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Donc $\varphi \circ \varphi(x) = \varphi(x)$ pour tout x et φ est une F-projection.

Montrons maintenant que φ est minimale :
Soit ψ une F-projection telle que $\psi \prec \varphi$.
On a donc $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \psi$
Donc $\|\psi(x)\| = \|\psi \circ \varphi(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$ et par minimalité $\|\psi(x)\| = \|\varphi(x)\|$.
Alors :

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \psi(x)\| = \|\varphi(\varphi(x) - \psi(x))\| &= \|\psi(\varphi(x) - \psi(x))\| \\ &= \|\psi(x) - \psi(x)\| = 0\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{\psi = \varphi}$.

Montrons enfin que $\varphi(B(H))$ est une enveloppe injective de F :
Puisque $B(H)$ est injectif et que φ est une projection complètement contractante sur le système d'opérateurs $\varphi(B(H))$, d'après le théorème **3.3**, $\varphi(B(H))$ est injectif.
Soit alors E un espace d'opérateurs injectif tel que $F \subseteq E \subseteq \varphi(B(H))$.
L'application $Id : E \to E$ peut être étendue en une projection complètement contractante $\gamma : B(H) \to E$.
Puisque $\gamma \circ \varphi$ est une F-application et que $\|\gamma \circ \varphi(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$, par minimalité on a $\|\gamma \circ \varphi(x)\| = \|\varphi(x)\|$.
Alors γ est une isométrie sur $\varphi(B(H))$ et comme $\gamma(\underbrace{\varphi(x) - \underbrace{\gamma \circ \varphi(x)}_{\in E \subseteq \varphi(B(H))}}_{\in \varphi(B(H))}) = 0$, alors

$\varphi(x) = \gamma \circ \varphi(x)$.
Donc $\varphi(B(H)) \subseteq E$ et $\boxed{\varphi(B(H)) = E}$ □

Ce théorème donne l'existence d'une F-projection minimale et d'une enveloppe injective de F.

3.4 Théorème de Ruan

On peut maintenant énoncer le :

Théorème 3.11 (Ruan)
Soit E un espace d'opérateurs . Alors :
E ***est injectif*** $\Leftrightarrow$ ***Il existe une C^*-algèbre injective A, deux projections p et q de A telles que E soit complètement isométrique à pAq.***

D'après ce qui a été énoncé au paragraphe 3.1, le sens réciproque a déja été démontré. Avant de montrer le sens direct, nous devons démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.12 *Soit $E \subseteq B(H)$ un espace d'opérateurs . Alors il existe une E-projection ϕ minimale et deux projections unitales complètement positives ψ_1 et ψ_2 telles que l'application*

$$\varphi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \phi \\ \phi_* & \psi_2 \end{bmatrix}$$

soit une projection unitale complètement positive de $M_2(B(H))$

Preuve.
Soit $L^E := \{\begin{bmatrix} \lambda & x \\ y^* & \mu \end{bmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y \in E\}$, le système de Paulsen de E.
L^E est un système d'opérateurs contenu dans $M_2(B(H)) = B(H \oplus H)$, donc d'après la propriété 3.9 et le théorème 3.10, il existe une L^E-seminorme minimale ρ_φ sur $M_2(B(H))$, telle que φ soit une L^E-projection minimale, et $\varphi(B(H \oplus H))$ une enveloppe injective de L^E.
Puisque φ est complètement contractante et unitale, alors (proposition 1.15 de **[8]**) φ est complètement positive .
Alors d'après le théorème de Stinespring's, il existe un Hilbert $\overline{K}$, $\overline{\pi} : M_2(B(H)) \to B(\overline{K})$ une *-représentation avec $\overline{\pi}(1_2) = 1_{\overline{K}}$, et $V : H \oplus H \to \overline{K}$ une isométrie tels que :

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = V^* \overline{\pi}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) V \quad (\in L^E)$$

Or d'après **[8]**(lemme 5.4), il existe un Hilbert K tel que $\overline{K}$ soit unitairement équivalent à $K \oplus K$, de sorte que $B(\overline{K}) \simeq M_2(B(K))$ et $\pi : B(H) \to B(K)$ une *-représentation unitale tels que :

$$\overline{\pi}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \pi(x_{11}) & \pi(x_{12}) \\ \pi(x_{21}) & \pi(x_{22}) \end{bmatrix}$$

Alors en identifiant $\overline{K}$ et $K \oplus K$, on a $V : H \oplus H \to K \oplus K$.
Montrons qu'il existe deux isométries $V_1 : H \to K$ et $V_2 : H \to K$ telles que :

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

Puisque φ est une L^E-projection et que $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \in L^E$ on doit avoir :

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = V^* \begin{bmatrix}\pi(1) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} V = V^* \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} V = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Appliquons cette égalité en $\begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix}$ pour $h \in H$:

$$V^* \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} V \begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix}$$

Puisque V est une isométrie, en multipliant des deux côtés par V on obtient :

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} V \begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix} = V \begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix}$$

On voit alors que $V \begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}*\\ 0\end{bmatrix}$.
Il existe donc $V_1 : H \to K$ telle que $V \begin{bmatrix}h\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}V_1 h\\ 0\end{bmatrix}$, et puisque V est une isométrie, V_1 aussi.

En faisant le même raisonnement à partir de $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, on obtient de même qu'il existe une isométrie $V_2 : H \to K$ telle que $V \begin{bmatrix}0\\ h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ V_2 h\end{bmatrix}$.
Ainsi V a la forme voulue.
On a alors

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}V_1^* & 0\\ 0 & V_2^*\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\pi(x_{11}) & \pi(x_{12})\\ \pi(x_{21}) & \pi(x_{22})\end{bmatrix} \begin{bmatrix}V_1 & 0\\ 0 & V_2\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}V_1^*\pi(x_{11})V_1 & V_1^*\pi(x_{12})V_2\\ V_2^*\pi(x_{21})V_1 & V_2^*\pi(x_{22})V_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

On pose alors $\psi_1 = V_1^*\pi(x_{11})V_1$, $\psi_2 = V_2^*\pi(x_{22})V_2$ et $\phi = V_1^*\pi(x_{12})V_2$, ce qui donne la décomposition :

$$\varphi = \begin{bmatrix}\psi_1 & \phi\\ \phi_* & \psi_2\end{bmatrix}$$

Puisque φ est une L^E-projection, il est clair que ψ_1,ψ_2 et ϕ sont des E-projections (attention la composition matricielle s'écrit $\varphi^2 = \begin{bmatrix}\psi_1^2 & \phi^2\\ (\phi_*)^2 & \psi_2^2\end{bmatrix}$ et on rappelle que ϕ_* est définie par $\phi_*(x) = \phi(x^*)^*$).
De plus puisque φ est unitale, ψ_1 et ψ_2 sont unitales.
Enfin ψ_i $(i = 1, 2)$ est complètement positive comme composées de de $T \mapsto V_i^* T V_i$ et de π qui sont complètement positives (cf **[8]**, exemple 2.10).

Reste à montrer que ϕ est minimale :
Soit ϕ_0 une E-projection telle que $\phi_0 \prec \phi$.
Notons que $F_0 := \phi_0(B(H))$ et $F := \phi(B(H))$ sont injectifs et que $E \subseteq F_0 \subseteq F$.

Supposons que $\phi_0 \neq \phi$. Alors $F_0 \subsetneq F$.
L'application identité $Id : F_0 \to F_0$ peut être étendue en une application complètement contractante $T : F \to F_0$ et il existe alors $x_0 \in \ker T$, $x_0 \neq 0$.
Soit $L^F := \{\begin{bmatrix} \lambda & x \\ y^* & \mu \end{bmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y \in F\}$ le système de Paulsen de F. Introduisons :

$$\begin{array}{ccc} \Psi\colon L^F & \to & M_2(B(H)) \\ \begin{bmatrix} \lambda & x \\ y^* & \mu \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \lambda & T(x) \\ T(y)^* & \mu \end{bmatrix} \end{array}$$

On a $\Psi_{|L^{F_0}} = Id$. De plus, d'après [8] (proposition 5.2), puisque T est complètement contractante , Ψ est complètement positive .
D'après la propriété **3.3** on peut donc étendre Ψ en une application complètement positive $\widetilde{\Psi} : M_2(B(H)) \to M_2(B(H))$.
Un argument déja cité montre que $\|\widetilde{\Psi}\|_{cb} = \|\widetilde{\Psi}(1)\| = \|\Psi(1)\| = 1$.
D'autre part $\widetilde{\Psi}_{|L^{F_0}} = Id$ et $L^E \subseteq L^{F_0}$, donc $\widetilde{\Psi}$ est une L^E-application.
Puisque ρ_φ est une L^E-seminorme, minimale, on a $\rho_\varphi \leq \rho_{\widetilde{\Psi}}$.
Or on a :

$$\rho_{\widetilde{\Psi}}\left(\begin{bmatrix} 0 & x_0 \\ x_0^* & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\|\widetilde{\Psi}\left(\begin{bmatrix} 0 & x_0 \\ x_0^* & 0 \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & T(x_0) \\ T(x_0)^* & 0 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

Et :

$$\rho_\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & x_0 \\ x_0^* & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\|\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & x_0 \\ x_0^* & 0 \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & \phi(x_0) \\ \phi(x_0)^* & 0 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & x_0 \\ x_0^* & 0 \end{bmatrix}\right\| = \|x_0\| \neq 0$$

car $x_0 \in F = \phi(B(H))$.
Ceci contredit la minimalité de ρ_φ, **donc** $\boxed{\phi_0 = \phi}$ **et** ϕ **est minimale** □

On peut maintenant passer à la preuve du théorème 3.11 :

Preuve.
On reprend les notations précédentes : $E \subseteq B(H)$, est un espace d'opérateurs injectif, ϕ une E-projection minimale et ψ_1 et ψ_2 deux projections unitales complètement positives telles que l'application

$$\varphi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \phi \\ \phi^* & \psi_2 \end{bmatrix}$$

soit une projection unitale complètement positive de $M_2(B(H))$.

Posons $A = \varphi(M_2(B(H)) \subseteq M_2(B(H))$.
C'est un injectif et $\varphi : M_2(B(H)) \to A$ est une projection contractante complètement positive .
D'après le théorème de Choi-Effros, A , muni de la multiplication $x \star y = \varphi(xy)$ est une C*-algèbre (injective).
Posons $p = \varphi(E_{11})$ et $q = \varphi(E_{22})$, qui sont deux projections de A ($p^2 = \varphi(E_{11}^2) = \varphi(E_{11}) = p$).
Puisque E est injectif, il existe une projection complètement contractante $s : B(H) \to E$.
Puisque ϕ est une E-projection minimale, on a $\phi \prec s$, donc $\phi \circ s = s \circ \phi = \phi$. Mais

puisque $E \subseteq \phi(B(H))$, on a $\phi \circ s = s$, donc $\phi = s$ et $E = \phi(B(H))$.
Définissons l'application $T : E \to p \star A \star q$ par :

$$T(x) = p \star \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \star q = \varphi \left(E_{11} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} E_{22} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \phi(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puisque $x \in E$.
Il est assez clair que T est complètement isométrique, comme le montre l'égalité vraie pour $[x_{ij}] \in M_n(E)$:

$$\|T_n([x_{ij}])\| = \left\| \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & x_{1n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & x_{n1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & x_{nn} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} [x_{ij}] & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right\| = \|[x_{ij}]\|$$

obtenue en identifiant $M_n(M_2(E))$ et $M_{2n}(E)$ et en faisant des permutations lignes/colonnes.
Enfin, T est surjective car :

$$p \star A \star q = \varphi(E_{11} M_2(B(H)) E_{22}) = \varphi \left(\begin{bmatrix} 0 & B(H) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \phi(B(H)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T(E)$$

Bien sûr, on s'affranchi de l'opération $\star$, et on obtient que :

$$\boxed{E \textbf{ est complètement isométrique à } pAq} \ \square$$

3.5 Cas particulier des espaces d'opérateurs de dimension finie

On peut se poser la question de savoir si dans le cas où E est un espace d'opérateurs injectif de dimension finie , on peut choisir A aussi de dimension finie dans le théorème de Ruan.
On peut tout d'abord remarquer que, d'une manière générale, un espace d'opérateurs de dimension finie ne s'injecte pas toujours de manière naturelle dans une C*-algèbre de dimension finie (cf [4]).

Mais si E est injectif on a le résultat suivant dû à D.Bletcher et à R. R Smith ([4]) :

Théorème 3.13
E est un espace d'opérateurs injectif de dimension finie si et seulement si il existe une C*-algèbre A de dimension finie, un projection p de A telle que E soit totalement isométrique à $pAp^{\perp}$.

Avant de débuter la preuve de ce résultat, on va d'abord établir la propriété suivante : On peut choisir $q = p^{\perp}$ dans le théorème de Ruan.

Propriété 3.14
Soit E un espace d'opérateurs . Alors :
E est injectif $\Leftrightarrow$ Il existe une C*-algèbre injective A, une projection p de A telles que E soit complètement isométrique à $pAp^{\perp}$.

Preuve.
Soit E un espace d'opérateurs injectif, A, p et q comme dans le théorème de Ruan.
Remarquons tout d'abord que E est totalement isométrique à $e_{12}\otimes E$ où $e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Alors E est totalement isométrique à $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_2(A) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$.
Donc en remplacant A par $M_2(A)$ (on peut voir facilement que c'est une C*-algèbre injective) et p et q par $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, on voit que l'on peut supposer $p \perp q$ (ie $pq = qp = 0$).
On a alors $p = p(p+q)$ et $q = (p+q)(1-p) = (p+q)p^{\perp}$.
Donc $pAq = p(p+q)A(p+q)p^{\perp}$. En remplacant A par $(p+q)A(p+q)$ (encore injective), on obtient le résultat □

Passons à la preuve du théorème :
Preuve.
On garde les mêmes notations que la propriété précédente en supposant que E est de plus de dimension finie et on pose $B = pAp$ et $C = p^{\perp}Ap^{\perp}$ qui sont deux C*-algèbres .
On a vu que l'on pouvait prendre $M_2(A)$ à la place de A et puisque (en s'autorisant l'écriture matricielle suivante) :

$$\begin{bmatrix} B & E \\ E^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pAp & pAp^{\perp} \\ p^{\perp}Ap & p^{\perp}Ap^{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

On peut identifier A à $\begin{bmatrix} B & E \\ E^* & C \end{bmatrix} = \{\begin{bmatrix} b & e \\ f^* & c \end{bmatrix}, b \in B, c \in C, e, f \in E\}$.

On voit facilement que E est un (B, C) bi-module, ce qui nous autorise à condidérer les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{rcl} \pi_1\colon B & \rightarrow & B(E) \\ b & \mapsto & \pi_1(b) : e \mapsto b.e \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_2\colon C & \rightarrow & B(E) \\ c & \mapsto & \pi_2(c) : e \mapsto e.c \end{array}$$

π_1 est un homomorphisme de C*-algèbre et π_2 un anti-homomorphisme (ie $L_2(cc') = L_2(c')L_2(c)$).
Soient alors $I_1 = \ker(\pi_1)$ et $I_2 = \ker(\pi_2)$, qui sont des idéaux fermés de B et C respectivement, donc auto-adjoints.
On sait alors que $\frac{B}{I_1} \simeq \pi_1(B)$ et $\frac{C}{I_2} \simeq \pi_2(B)$ et sont donc des C*-algèbres de dimension finie (car inclus dans $B(E)$ de dimension finie).
Posons alors $I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, i \in I_1, j \in I_2\}$.
Montrons que I est un idéal de A :
Pour $i \in I_1$, $j \in I_2$ et $f \in E$, on a : $f^*i = (i^*f)^* = 0$ car I_1 est auto-adjoint et de même $jf^* = (fj^*)^* = 0$.
Ainsi pour $i \in I_1, j \in I_2, e, f \in E, b \in B, c \in C$:

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & e \\ f^* & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ib & 0 \\ 0 & jc \end{bmatrix} \in I$$

Et :

$$\begin{bmatrix} b & e \\ f^* & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bi & 0 \\ 0 & cj \end{bmatrix} \in I$$

Donc I est un idéal (fermé puisque I_1 et I_2 le sont).
Soit alors la projection $\pi : A \to \dfrac{A}{I}$. C'est une application complètement contractante (voir [8]).
On rappelle que pour $e, f \in E, b \in B, c \in C$, on a :

$$\left\| \pi \left(\begin{bmatrix} b & e \\ f^* & c \end{bmatrix} \right) \right\| = \inf\{ \left\| \begin{bmatrix} b+i & e \\ f^* & c+j \end{bmatrix} \right\|, i \in I_1, j \in I_2 \}$$

On identifie $M_n(A)$ à $\{ \begin{bmatrix} J & M \\ N^* & K \end{bmatrix}, J \in M_n(I_1), K \in M_n(I_2), M, N \in M_n(E)\}$ et $M_n(E)$ à $\{ \begin{bmatrix} O_n & M \\ O & O_n \end{bmatrix}, M \in M_n(E)\}$ (cette identification préservant la norme) et on remarque que pour tout $M \in M_n(E), J \in M_n(I_1), K \in M_n(I_2)$:

$$\|M\| = \left\| \begin{bmatrix} 0_n & M \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} J & M \\ O_n & K \end{bmatrix} \right\| (*)$$

En effet $\begin{bmatrix} J & M \\ 0_n & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_n & M \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0_n \\ 0_n & K \end{bmatrix}$ qui est une matrice postive car J et K sont autoadjoints et $JK = 0_n \geq 0_n$ (car $BC = pApp^{\perp}Ap^{\perp} = 0$).
En passant à la borne inférieure sur J et K dans $(*)$, on obtient que

$$\|M\| \leq \left\| \pi_n(\begin{bmatrix} 0_n & M \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}) \right\|$$

Or puisque π est complètement contractante on a l'égalité.
Ceci montre que $\pi_{|E}$ est complètement isométrique et puisque $\pi(E) = \pi(p)\dfrac{A}{I}\pi(p)^{\perp}$ et que $\dfrac{A}{I} = \begin{bmatrix} B/I & E \\ E^* & C/I \end{bmatrix}$ est une C*-algèbre de dimension finie, le théorème est démontré □

Bibliographie

[1] Lacey, The isometric theory of Banach spaces, Springer-Verlag(1974)

[2] Paulsen, completely bounded maps and operators algebras, Cambridge University Press(2002)

[3] Ruan, Injectivity of operators spaces, Trans.AMS 315 (1989)

[4] Smith, Finite dimensional injective spaces, Proc.AMS 128 Number 11(2000)

[5] Munkres, Topology, second edition, Prentice Hall(2000)

[6] Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, édition augmentée, Hermann(2003)

[7] Lindenstrauss-Tzafriri, Classical Banach spaces I,II reprint, Springer-Verlag(1996)

[8] C. Le Merdy, Cours de DEA(2006)

[9] Takesaki, Theory of operator algebras 1, Enc.Math.Sci.124, Springer(2001)

[10] Q.Xu, Cours de DEA(2006)