Exercices : étude d'une fonction

1 Calcul de la dérivée et tableau de variations

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$

1. Donner la dérivée de f.
2. Déterminer son sens de variation.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Tracer la courbe de f et sa tangente en 0.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes (dont on donne l'ensemble de définition), calculer sa dérivée :

1. $f(x) = x^3 - 4x + 8$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $g(t) = t^2 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t^2}$, $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.
3. $u(x) = e^x - 1$, $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$.
4. $A : x \mapsto \ln x + x$, $\mathcal{D}_A =]0; +\infty[$.
5. $f : t \mapsto (t^2 - 1)e^t$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
6. $h : a \mapsto \dfrac{\ln a}{a+1}$, $\mathcal{D}_h =]0; +\infty[$.
7. $f(x) = e^{-2x}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Établir le tableau de variations de la fonction f.
3. Étudier le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 4

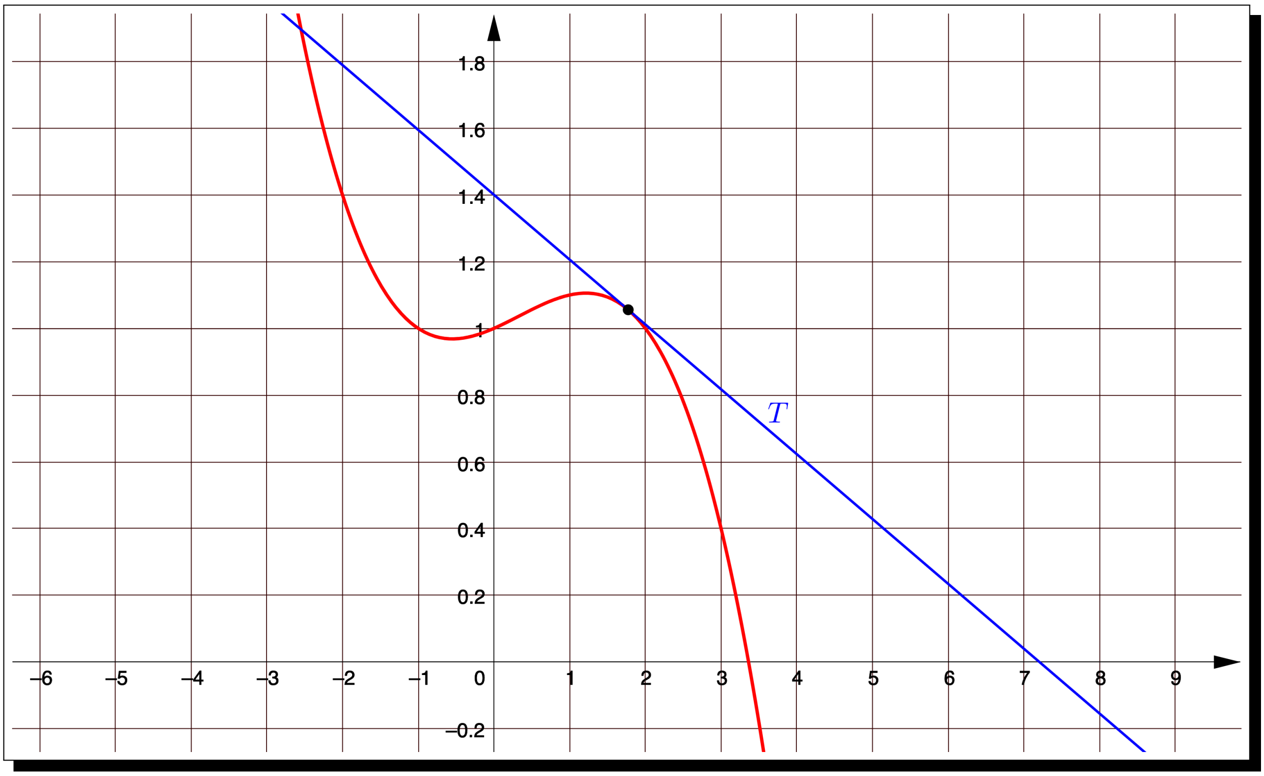
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

1. Calculer la dérivée de g.
2. Établir le tableau de variations de g.
3. Montrer que g est une fonction impaire. Que peut-on en déduire concernant sa courbe représentative ?

2 Lecture graphique

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous :



Uniquement par lecture graphique :

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.
2. 1.4 admet t'il un antécédent par f ?
3. Quelle est l'équation de la tangente T
4. Peut-on déterminer graphiquement les limites de la fonctions en $\pm\infty$.
5. Donner les coordonnées d'un potentiel point d'inflexion.

3 Limites

Exercice 6

Donner la limite en a des fonctions suivantes :

1. $u(x) = 2x^3 + 3x + 1$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
2. $v(x) = 2x^2 - \dfrac{3}{x}$ en $a = -\infty$, en $a = O^-$, en $a = 0^+$ et en $a = +\infty$.
3. $f(x) = e^x + x + 1$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
4. $g(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$ en $a = -\infty$, en $a = 1^-$, en $a = 1^+$ et en $a = +\infty$.

Exercice 7

Donner la limite en a des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x\ln(x) - 1$ en $a = 0^+$ et en $a = +\infty$.
2. $f(x) = (x+1)e^x$ en $a = -\infty$ et en $a = +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} + 2$ en $a = 0^+$ et en $a = +\infty$.

4 Asymptotes

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.
Montrer que la courbe de f admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale et en donner les équations respectives.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - 2$.
Montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x - 2$ comme asymptote en $-\infty$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \ln(x)$.

1. Montrer que la courbe de f admet une asymptote verticale et en donner une équation.
2. Montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = 2x$ comme direction asymptotique en $+\infty$.

5 Concavité

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 2e^x(1-x)$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f en $-\infty$?
4. Tracer la tangente à la courbe de f aux points d'abscisse -1 et 1.
5. Tracer la courbe représentative de f.