Exercices : suites

1 Calculs de termes

Exercice 1

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 5\sqrt{n} - 3 \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{2}{n+1} + 1$$

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.

Exercice 2

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\begin{array}{lll} u_0 = 1 & \text{et} & u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1 \\ v_1 = 5 & \text{et} & v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n} \end{array}$$

Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 4 (*Calcul de u_{n+1}*)

Pour chaque suite (u_n), donner l'expression du terme u_{n+1} :

(a) $u_n = 3 - 2n$ (b) $u_n = n^2 - 1$ (c) $u_n = \dfrac{2}{n+1}$

2 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 5

1. Poursuivre la suite arithmétique :
   -7 -3 1 5 ... ...
2. Poursuivre la suite géométrique :
   0,5 -1 2 -4 ... ...

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

1. On donne $u_0 = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$. Calculer u_{13}.
2. On donne $u_{36} = 86$ et $r = 2$. Calculer u_0.
3. On donne $u_2 = 2$ et $u_{15} = 67$. Calculer r et u_1.
4. On donne $u_8 = 34$ et $r = 3$. Calculer u_1.

Exercice 7

1. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_4 = 5$ et $u_{11} = 19$.
   Calculer la raison r et le premier terme u_0 de cette suite.
2. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_2 = 1$ et $v_7 = 32$.
   Calculer la raison q et le premier terme v_0 de cette suite.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_5.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

1. On donne $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_7.
2. On donne $u_1 = 2$ et $q = \frac{3}{2}$. Calculer u_5.
3. On donne $u_4 = 7$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_1.
4. On donne $u_2 = 4$ et $u_4 = \frac{16}{9}$. Calculer q. (On suppose $q > 0$.)

3 Applications

Exercice 10

Un pépiniériste vend des bananiers de 35 cm de haut et annonce qu'ils grandissent de 8 cm par mois.
Exprimer la hauteur u_n d'un bananier au bout du $n^{\text{ième}}$ mois.
En combien de temps ce bananier dépassera-t-il 1 mètre de hauteur ?

Exercice 11

Un capital de 8000 euros est placé au taux annuel de 3,5% de rémunération.
Quelle est la valeur du capital après cinq ans ?
En combien d'années ce capital pourrait-il doubler ?

4 Calculs de sommes

Exercice 12 (*Ecrire une somme*)

Calculer les sommes suivantes en écrivant la somme des termes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}(2k+1)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}k^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}$

Exercice 13 (*Appliquer une formule du cours*)

Calculer les sommes suivantes en choisissant la formule du cours qui convient :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}(3k-2)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12}(1-4k)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}3^k$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{2^k}$

5 Suites arithmético-géométriques

Exercice 14

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1+2u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + 1$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.
   (b) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (c) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 15

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.
1^{er} contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros

par mois jusqu'à la fin du bail.
2ème contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36ème mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs).

6 Récurrence

Exercice 16

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 17

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner une expression des trois premiers termes de la suite.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

   Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{2 + v_n}$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 < v_n \leq 1$.

Exercice 18

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.